XXIV. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny
II. kategória
Megoldások
(Kosztolányi József)

1. $(0{,}6)^{-2} =$

(A) –0,36 (B) 0,036 (C) $\frac{9}{25}$ **(D)** $\frac{25}{9}$ (E) 3,6

Megoldás: $(0{,}6)^{-2} = \left(\frac{6}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$

2. Egy téglatest alakú akvárium 1 méter hosszú és 25 centiméter széles. Az akvárium teljes megtöltéséhez 55 liter víz szükséges. Hány centiméter az akvárium magassága?

(A) 11 **(B)** 22 (C) 44 (D) 110 (E) 220

Megoldás: Ha x az akvárium centiméterben mért magasságát, akkor
$$25\cdot 100\cdot x = 55000,$$
ahonnan $x = 22\,(\text{cm})$.

3. Az *ABCD* négyzet *BC* és *CD* oldalára kifelé felvesszük a *BEC* és *CFD* szabályos háromszögeket. Hány fokos az *FCE* szög?

(A) 60 (B) 90 (C) 120 **(D)** 150 (E) 180

Megoldás: A négyzet *C* csúcsánál levő teljes szögből a négyzet és a két szabályos háromszög egy-egy szöge összesen $90° + 2\cdot 60° = 210°$ nagyságú szöget fed le. Így $FCE\sphericalangle = 150°$.

4. A *p, q, r* prímszámok 50-nél kisebbek és $p + q = r$. Az *r* lehetséges értékeinek száma:

(A) 0 (B) 2 (C) 4 **(D)** 6 (E) 8

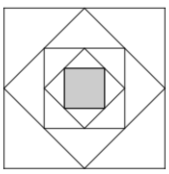
Megoldás: Két páratlan prím összege páros, ezért *p* és *q* közül az egyik, mondjuk *p* értéke 2. Az 50-nél kisebb prímek: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Ezek közül az ikerprím párok kisebbik tagja lesz a megfelelő *q*. Ezek: 3, 5, 11, 17, 29, 41. Így *r* lehetséges értékeinek száma 6.

5. 1-től 999-ig összeszorozzuk a páratlan számokat (1-et és 999-et is beleértve). Mi lesz a szorzat utolsó számjegye?

(A) 1 (B) 3 **(C)** 5 (D) 7 (E) 9

Megoldás: Az első öt pozitív páratlan szám szorzata az 5 páratlan számszorosa, így 5-re végzódik. 1-től 999-ig 500 darab páratlan szám van. Ezek növekvő sorrendben vett szorzata 100 darab ötös csoportra bontható, amelyekben az öt szám szorzata 5-re végződik. Így a teljes szorzat is 5-re végződik.

6. A legnagyobb négyzet területének hány százaléka az alábbi ábrán szürkével kiemelt négyzet területe?



(A) 6,25% (B) 10% (C) 12,5% (D) 16% (E) 25%

Megoldás: Könnyen igazolható, hogy a négyzet oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet területe az eredeti négyzet területének fele. Így a szürke négyzet területe az eredeti négyzet területének $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ része. Ez $\frac{100}{16}\%=6,25\%$.

7. Az első száz darab pozitív egész szám közül összeadjuk külön a párosakat és külön a páratlanokat. Mennyi a két összeg különbsége?

(A) 0 (B) 25 (C) 50 (D) 100 (E) 200

Megoldás: A kérdezett különbség egy alkalmas csoportosítás után azonnal adódik.

$$(2+4+6+...+100)-(1+3+5+...+99)=(2-1)+(4-3)+...+(100-99)=50$$

8. Ha $a<b<0<c$, akkor biztosan igaz, hogy

(A) $a+b+c>0$ (B) $(a+b)^2-c>0$ (C) $a+b+c^2>0$ (D) $a+b-c>0$ (E) $a+b-c<0$

Megoldás: A feltétel alapján biztosan csak az $a+b-c<0$ igaz, ugyanis *a*, *b* és $-c$ is negatív.

9. Egy szabályos érmét ötször feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem mindegyik dobás eredménye fej?

(A) $\frac{15}{16}$ (B) $\frac{27}{32}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) $\frac{31}{32}$

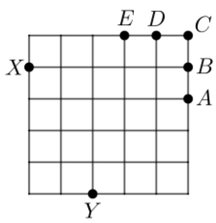
Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy mindegyik fej $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$, ezért annak a valószínűsége, hogy nem mindegyik dobás eredménye fej $1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$.

10. Egy piaci gyümölcsárusnál az eladásra kínált barackok 90%-a őszibarack, 10%-a sárgabarack. Az őszibarackok 10%-a, a sárgabarackok 30%-a I. osztályú, a többi II. osztályú. Az I. osztályú barackok hány százaléka őszibarack?

(A) 9 (B) 80 (C) $33\frac{1}{3}$ (D) 75 (E) 25

Megoldás: Az összes barack mennyisége (mondjuk kg-ban) legyen *x*. Ekkor az I. osztályú őszibarack mennyisége $0,1\cdot 0,9\cdot x=0,09\cdot x$. Az I. osztályú sárgabarack mennyisége $0,3\cdot 0,1\cdot x=0,03\cdot x$. Az összes I. osztályú barack mennyisége így $0,12\cdot x$. Látható, hogy az I. osztályú barackok $\frac{3}{4}$ része, azaz 75%-a őszibarack.

11. Az alábbi ábrán az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok közül melyik határoz meg az *X* és *Y* pontokkal egyenlő szárú háromszöget?



(A) A **(B)** B (C) C (D) D (E) E

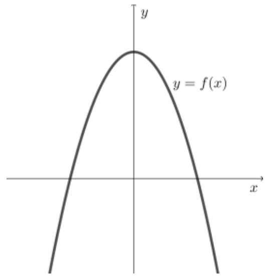
Megoldás: A Pitagorasz-tétel alapján $XY=\sqrt{20}$, $XC=\sqrt{26}$, $XD=\sqrt{17}$, $XB=5$, $YA=\sqrt{18}$, $YB=5$. Az XYB háromszög egyenlő szárú.

12. a és b pozitív egész számok. Hány olyan egész szám van, amelyik nagyobb $a\cdot b$-nél, de kisebb $a\cdot(b+1)$-nél?

(A) 1 (B) $a-2$ (C) $b-1$ (D) a **(E)** $a-1$

Megoldás: $a\cdot(b+1)-a\cdot b=a$, ezért a kérdéses egész számok száma $a-1$.

13. Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ grafikonja az ábrán látható. Melyik állítás igaz biztosan az alábbiak közül?



(A) $a+b+c=0$ **(B)** $a+b-c<0$ (C) $-a+b-c>0$

(D) $a+b+c<0$ (E) Az előzőek közül több is lehetséges.

Megoldás: A grafikon szimmetrikus az y tengelyre, ezért $b=0$. A parabola lefelé nyíló, ezért $a<0$. A tengelypont az y tengely pozitív félegyenesén van, ezért $c>0$. Mivel a és c abszolút értékének nagyságrendi viszonyáról nincs információnk, ezért csak az $a+b-c<0$ biztos.

14. Egy szabadtéri színház nézőterén 630 szék van sorokban elrendezve. Minden egyes sorban 3-mal több szék van, mint a közvetlenül előtte levő sorban. Az alábbi számok közül melyik nem lehet a sorok száma?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 **(D)** 6 (E) 7

Megoldás: Ha a sorok száma $2n+1$, akkor a középső sorban $\frac{630}{2n+1}$ szék van. 630 osztóit végigvizsgálva kapjuk, hogy $2n+1$ lehet 1, 3, 5, 7, 9, 15, … .

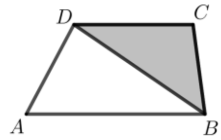
Ha a sorok száma $2n$, akkor a két középső sorban összesen $\frac{630}{n}$ szék van. Az osztók vizsgálatával ebben az esetben kapjuk, hogy $2n$ lehet 2, 4, 6, 10, … . Figyelembe kell azonban vennünk, hogy a két középső sorban összesen páratlan sok szék van, ezért a felsorolt lehetőségek közül 6 nem lehet a sorok száma.

15. Hány olyan pozitív egész szám van, amellyel az 50-et elosztva a maradék 5?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Megoldás: A 45 5-nél nagyobb osztói a megfelelő számok. Ezek: 9, 15, 45. Tehát 3 megfelelő szám van.

16. Az $ABCD$ trapézban $AB=3$ és $CD=2$. A szürke háromszög területe hányad része a trapéz területének?



(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

Megoldás: Mivel a szürke és a fehér háromszögnek az *CD* illetve *AB* oldalához tartozó magassága megegyezik, ezért a két háromszög területének aránya egyenlő a *CD* és *AB* alapok hosszának arányával, azaz $\frac{2}{3}$. Így a szürke háromszög területe $\frac{2}{5}$ része a trapéz területének.

17. Egy négy fiúból és hat lányból álló csoportban a csoporttagok testtömegének átlaga 64 kg. Ha a fiúk testtömeg átlaga 70 kg, akkor a lányok testtömeg átlaga kg-ban

(A) 58 (B) 59 **(C)** 60 (D) 61 (E) 62

Megoldás: A csoport össztömege 640 kg. A fiúk össztömege 280 kg, így a lányok össztömege 360 kg. A hat lány testtömeg átlaga 60 kg.

18. Egy szabályos dobókocka lapjain rendre a -3, -2, -1, 0, 1, 2 számok állnak. A kockával kétszer dobunk, és a dobott számokat összeszorozzuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott szorzat negatív?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{13}{36}$ **(E)** $\frac{1}{3}$

Megoldás: Negatív szorzatot akkor kapunk, ha egy pozitív és egy negatív számot szorzunk össze.

Annak a valószínűsége, hogy az első dobás negatív, a második pozitív: $P(-;+)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Annak a valószínűsége, hogy az első dobás pozitív, a második negatív: $P(+;-)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Ezek összege adja a keresett valószínűséget: $P(\text{szorzat negatív})=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

19. A $\otimes$ műveletet a következőképpen definiáljuk: bármely *a*, *b* valós számra $a\otimes b=a+b^2$. Ha *a* pozitív és $(a\otimes a)\otimes a=a\otimes(a\otimes a)$, akkor $a=$

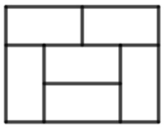
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$ (E) 2

Megoldás: $(a\otimes a)\otimes a=\left(a+a^2\right)\otimes a=a+2a^2$

$$a\otimes(a\otimes a)=a+\left(a+a^2\right)^2=a+a^2+2a^3+a^4$$

A feltétel szerint $a+2a^2=a+a^2+2a^3+a^4$, ahonnan (felhasználva, hogy *a* pozitív) 0-ra rendezés és egyszerűsítés után $a^2+2a-1=0$. Ennek pozitív gyöke $\sqrt{2}-1$.

20. Egy téglalap alakú legelőt hat egybevágó parcellára bontottak fel az ábrán látható módon. Mekkora egy parcella kerülete méterben, ha a legelő kerülete 700 méter?



(A) $116\frac{1}{3}$ (B) 300 (C) 200 (D) 150 (E) 600

Megoldás: Jelölje a kis parcella hosszabb oldalának hosszát méterben *a*, rövidebb oldalának hosszát *b*. Ekkor egyrészt $2a = a + 2b$, ahonnan $a = 2b$, másrészt $4a + 2\cdot(a+b) = 700$.

A második egyenletbe *a*-t behelyettesítve kapjuk, hogy $b = 50$ (m), és így $a = 100$ (m). A keresett kerület: $2a + 2b = 300$ (m).

21. Aladár, Béla és Csaba egy közös horgászat alkalmával összesen 100-nál kevesebb halat fogtak. Aladár pontosan háromszor annyi halat fogott, mint Béla, és pontosan négyszer annyit, mint Csaba. Legfeljebb hány halat foghatott Aladár?

(A) 48 (B) 50 (C) 60 (D) 66 (E) 72

Megoldás: Ha *a* az Aladár által fogott halak száma, akkor a feltételek alapján

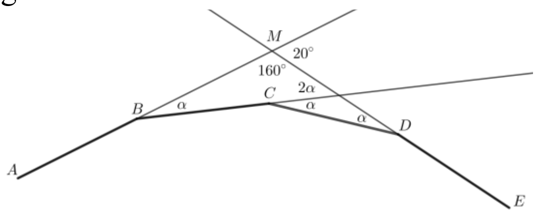
$$a + \frac{a}{3} + \frac{a}{4} \le 99.$$

Mivel mindenki egész számú halat fogott, ezért *a* osztható 3-mal és 4-gyel, azaz 12-vel. Ha $a = 12x$ (*x* egész), akkor az előző egyenlőtlenség: $19x \le 99$. $x = 5$ a legnagyobb egész szám, ami kielégíti ezt az egyenlőséget, ezért Aladár legfeljebb $12\cdot 5 = 60$ halat foghatott.

22. Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok ebben a sorrendben egy szabályos sokszög egymást követő csúcsai. Az *AB* és *DE* egyenesek metszéspontja *M*. Hány oldalú a sokszög, ha a *BMD* szög 160°-os?

(A) 36 (B) 42 (C) 48 (D) 52 (E) 54

Megoldás: Az ábra alapján $3\alpha + 160° = 180°$, ahonnan $\alpha = \frac{20}{3} = \frac{360}{54}$. Mivel α a sokszög egyik külső szöge, ezért a sokszög 54 oldalú.

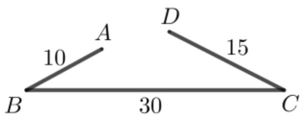


23. *A*, *B*, *C* és *D* a sík pontjai úgy, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Tudjuk, hogy $AB = 10$, $BC = 30$, $CD = 15$ és $AD = n$, ahol *n* pozitív egész szám. Hány különböző értéket vehet fel az *n*?

(A) 5 (B) 49 (C) 50 (D) 54 (E) 55

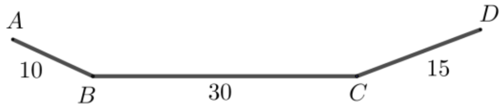
Megoldás: Rögzítsük a *B* és *C* pontokat, és vizsgáljuk *A* és *D* hozzájuk képest hogyan helyezkedhet el.

A és *D* közel van egymáshoz, ha az alábbi ábrának megfelelően helyezkedik el.



Ekkor $AD = n > 5$, és mivel *n* egész, ezért $n \ge 6$.

A és D távol van egymástól, az alábbi ábrának megfelelő helyzetben.



Ekkor $AD = n < 55$, és mivel n egész, ezért $n \le 54$.
Kaptuk, $6 \le n \le 54$, így n lehetséges egész értékeinek száma 49.

24. Hány olyan négyjegyű, a 0 számjegyet nem tartalmazó pozitív egész szám van, amelynek bármely számjegyét elhagyva a kapott háromjegyű szám osztható 3-mal?

(A) 81 (B) 113 (C) 162 (D) 178 **(E)** 243

Megoldás: Három esetet kell megvizsgálnunk.
1. A négyjegyű szám minden számjegye 3-mal osztható, azaz a 3, 6, 9 számok valamelyike. Ilyen négyjegyű szám $3^4 = 81$ darab van.
2. A feltétel teljesül, ha a számjegyek 3-mal osztva 1 maradékot adnak, azaz, ha a négyjegyű szám mindegyik számjegye az 1, 4, 7 számok valamelyike. Ilyen négyjegyű számból is 81 darab van.
3. A 3-mal osztva 2 maradékot adó számjegyekből (2, 5, 8) álló négyjegyű számok is megfelelők, belőlük is 81 darab van.
Összesen $3 \cdot 81 = 243$ megfelelő négyjegyű szám van.

25. Egy körvonalon felvettünk nyolc pontot, az egyiket P-vel jelöltük. A felvett pontok között úgy húzunk húrokat, hogy a P-től különböző hét pontból induló húrok száma páronként különböző. Legkevesebb hány húr indul ki P-ből?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Megoldás: Az egyes pontokból kiinduló húrok száma lehet 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Viszont a 0 és a 7 egyszerre nem fordulhat elő, hiszen ha egy pont mindegyik másik ponttal össze van kötve, akkor nem lehet olyan pont, amelyik egyikkel sincs összekötve.
Ha az egyes pontokból kiinduló húrok számát a pont *fokszámának* nevezzük, akkor a nyolc pont hét különböző fokszám értéket vehet fel, azaz a skatulyaelv következtében lesz két azonos fokszámú pont.
Mivel a feltétel szerint a P-től különböző pontok fokszámai páronként különbözők, ezért a fentiek alapján lesz P-vel azonos fokszámú pont.
Könnyen látható, hogy sem két 0-adfokú, sem két elsőfokú, sem két másodfokú pont nem lehet a nyolc pont között, mert ezekben az esetekben nem teljesülne a P-től különböző hét pont fokszámainak különbözőségére vonatkozó feltétel.
Harmadfokú viszont már lehet P, ahogy azt az alábbi ábra is mutatja.