

XXIV. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny-2021

III. kategória megoldások

1. Mennyi a következő kifejezés értéke?

$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 8 \cdot 4 \cdot 25 = 8 \cdot 100 = 800$$

B

2. Mennyi 2500 ötszörösének a tizede?

$$2500 \cdot 5 \cdot \frac{1}{10} = 2500 \cdot \frac{5}{10} = \frac{2500}{2} = 1250$$

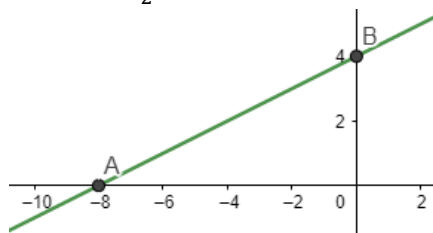
C

3. Mennyi az $y = \frac{1}{2}x + 4$ függvény grafikonjának meredeksége?

Az $f(x) = ax + b$ hozzárendelési szabályú függvény lineáris függvény, a meredeksége az x együtthatója, jelen esetben $a = \frac{1}{2} = 0,5$

Másik megoldás:

Az $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ függvény grafikonja és annak két pontja:



$$f(-8) = \frac{1}{2} \cdot (-8) + 4 = -4 + 4 = 0 \Rightarrow A(-8; 0)$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow B(0; 4)$$

A függvény meredeksége:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{0 - (-8)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$$

B

4. Az $x = x^3$ egyenletnek hány megoldása van?

Átrendezve az egyenletet:

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0

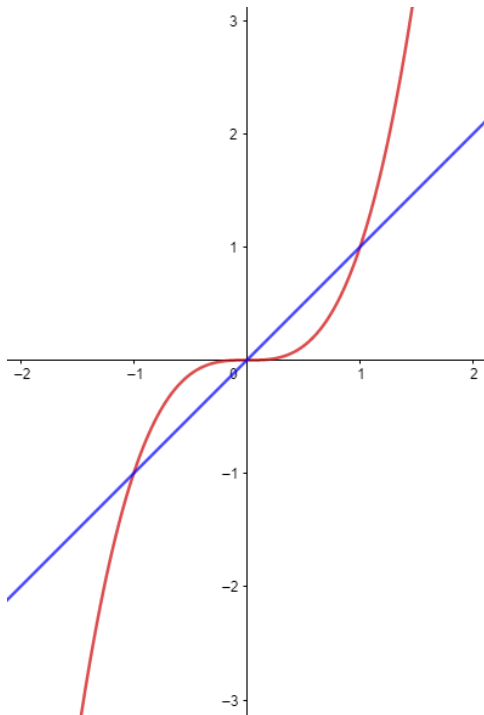
$$x = 0 \text{ vagy } x^2 - 1 = 0$$

Tehát 3 megoldása van az egyenletnek

$x \in \{0; -1; 1\}$, vagyis három megoldása van az egyenletnek

Másik (grafikus) megoldás:

A baloldali és a jobboldali két függvény grafikonja:



Az ábrán látható tartományban három metszéspont van: $x \in \{-1; 0; 1\}$

Ha $x > 1$, akkor $x < x^3$

Ha $x < -1$, akkor $x > x^3$

Azaz az ábrán látható tartományon kívül nincsen metszéspontjuk.

Három megoldása van az egyenletnek.

D

5. **A kamillavirág száradáskor elveszti friss tömegének 85 %-át. Mennyi száraz kamilla lesz 72,4 kg friss virágból?**

$$72,4 \cdot (1 - 0,85) = 72,4 \cdot 0,15 = 10,86$$

C

6. **András, Berci, Gergő és Nándi életkorának az összege 115 év. Hány évesek lesznek együtt jövő ilyenkor?**

$$\text{Jelenleg: } A + B + G + N = 115$$

$$\text{jövőre: } (A + 1) + (B + 1) + (G + 1) + (N + 1) = (A + B + G + N) + 4 = 115 + 4 = 119$$

D

7. **Egy szálloda 12 szobájában 32 férőhely van. A szobák két-, illetve háromágyasok. Hány kétágyas szoba van a szállodában?**

Ha a kétágyas szobák száma k , akkor a férőhelyek száma:

$$k \cdot 2 + (12 - k) \cdot 3 = 2k + 36 - 3k = 36 - k = 32$$

Amiből $k = 4$

Ellenőrzés: 4 db kétágyas szobában 8 hely, 8 db háromágyas szobában 24 hely.

B

8. Egy könyv $\frac{3}{4}$ részét, 273 oldalt már elolvastunk. Hány oldalas a könyv?

$$x \cdot \frac{3}{4} = 273 \Rightarrow x = \frac{273}{\frac{3}{4}} = 273 \cdot \frac{4}{3} = 364$$

Másik megoldás:

Ha a $\frac{3}{4}$ rész = 273, akkor az $\frac{1}{4}$ rész $273 : 3 = 91$

Igy a $\frac{4}{4}$ rész $91 \cdot 4 = 364$

D

9. Egy tanulónak 20 feladatot kellett megoldania, ahol minden jó megoldás 1 pontot jelentett, viszont minden rossz megoldás 2 pont levonással járt. Hány feladatot oldott meg jól, ha a végén 11 pontja lett?

Ha a jól megoldott feladatok száma j , akkor az elért pontszám:

$$j - (20 - j) \cdot 2 = j - 40 + 2j = 3j - 40 = 11$$

$$\text{Amiből } j = \frac{40+11}{3} = 17$$

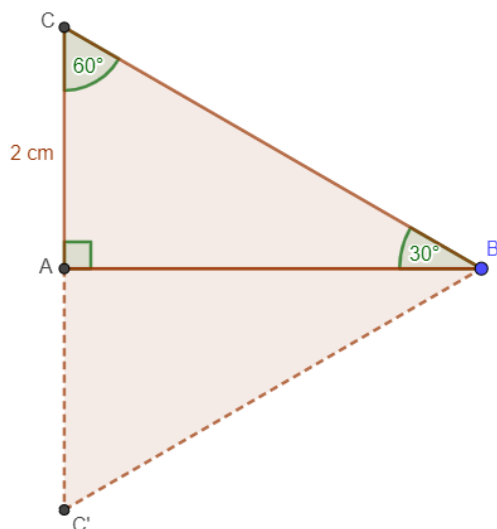
Ellenőrzés: 17 jó feladatért 17 pont, 3 rossz feladatért -6 pont.

E

Megjegyzés: a feladat szövege nem utalt a „kihagyás” lehetőségére, feltételezte, hogy csak jó vagy rossz megoldás van.

10. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30° , az ezzel szemközti befogó 2 cm. Mekkora a háromszög átfogója?

Az ABC háromszög félszabályos háromszög (30° -os szöget tartalmazó derékszögű háromszög),



amit az AB oldalra tükrözve szabályos háromszöggé lehet kiegészíteni.

A $CC'B$ szabályos háromszögnek a B csúccsal szemközti oldala $2 \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ hosszú, tehát a BC oldal is (ami az eredeti, ABC derékszögű háromszög átfogója) ugyanilyen hosszú.

B

11. Két gyalogos egymással szemben indul el 10 km távolságra levő pontokból ugyanabban az időpontban. Az egyik 4 km/óra a másik 6 km/óra sebességgel halad. Mennyi idő múlva találkoznak?

A gyalogosok közötti távolság $4+6 = 10$ km-rel csökken óránként, így pontosan 1 óra múlva találkoznak.

A

12. Jancsinak négyszer annyi könyve van, mint Karcsinak. Ha kettejüknek összesen 85 db könyve van, akkor mennyi van Jancsinak?

Ha Karcsinak k db könyve van, akkor Jancsinak $4k$ db könyve van, és

$$4k + k = 5k = 85$$

Amiből $k = \frac{85}{5} = 17$, amiből $4k = 68$

D

13. Egy szám nullára végződik. Ha a szám végéről elhagyjuk a nullát, és az így kapott számot az eredetihez adjuk, 15257-et kapunk. Melyik az eredeti szám?

Ha egy nullára végződő szám végéről elhagyjuk a 0-t, akkor a szám tizedét kapjuk.

Ha az eredeti szám x , akkor

$$x + \frac{x}{10} = \frac{11}{10}x = 15257$$

amiből $x = 15257 \cdot \frac{10}{11} = 13870$

D

14. Egy 18000 Ft-os kabát árát kétszer egymásután 20 %-kal leértékelték. Mennyi lett a kabát ára a második leértékelés után?

$$18000 \cdot (1 - 0,20) \cdot (1 - 0,20) = 18000 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 11520$$

E

15. Jancsi két óra hosszat 4 km/óra sebességgel gyalogolt, majd lovaskocsin folytatta útját 1 órán át 7 km/óra sebességgel. Milyen átlagsebességgel tette meg az egész utat?

Két órán keresztül 4 km/h sebességgel haladt, tehát 8 km-t tett meg,

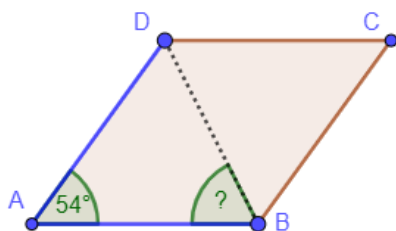
majd egy órán keresztül 7 km/h sebességgel haladt, tehát további 7 km-t tett meg.

Összesen három óra alatt 15 km-t tett meg, tehát az átlagsebessége $\frac{15 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C

16. Egy rombusz egyik szöge 54° . Mekkora szöget zár be a rövidebb átló az oldalakkal?

Az $ABCD$ rombusznak az A csúcsnál lévő szöge 54° , kérdés, mekkora a DBA szög?



Mivel a rombusznak minden oldala azonos hosszú, ezért az ABD háromszög egyenlőszárú

($AB = AD$), és a B csúcsnál lévő szöge $\frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = \frac{126^\circ}{2} = 63^\circ$

B

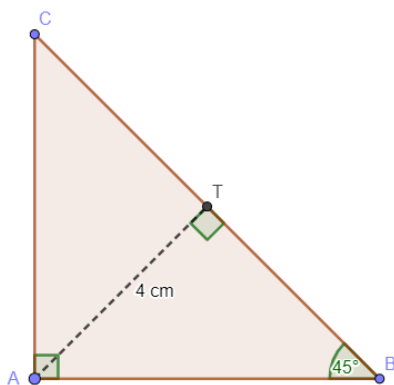
17. **Ha Zsuzsi oda-vissza autóbusszal megy az iskolába, akkor naponta fél órát utazik. Egyik napon busszal ment és gyalog jött haza, így másfél órát volt úton. Mennyi időt tölt úton, ha oda és vissza is gyalog megy?**

Ha a napi kétszeri busszal való utazás ideje $2b = 30$ perc,
akkor az egy busszal és egy gyalog történő utazás együttes ideje pedig $b + g = 90$ perc,
ekkor a $b = 15$ perc, amiből $g = 75$ perc, amiből
két gyalog történő utazás ideje: $2g = 150$ perc

D

18. **Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 4 cm. Mekkora a háromszög területe?**

Az ABC háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság 4 cm:



Ebből következik, hogy az átfogó hossza a keletkezett két egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszög vagy a Thalész-kör miatt $2 \cdot 4 = 8$ cm, amiből

$$T = \frac{\overbrace{8 \text{ cm}}^{\text{átfogó}} \cdot \overbrace{4 \text{ cm}}^{\text{átfogóhoz tartozó magasság}}}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

B

19. **Olajjal teli tartályból először felhasználtak 25 litert, majd később a maradék hatodrészt. Ezután 15 literrel több olaj maradt a tartályban, mint amennyit a két alkalommal kivettek belőle. Hány liter volt a tartályban eredetileg?**

Ha a tartály x literes, és kivesznek belőle 25 l-t, majd a maradék egyhatodát, akkor marad benne $(x - 25) \cdot \frac{5}{6}$ liter.

Ez 15 literrel több, mint amennyit kivettek belőle

\Rightarrow ha kivesznek még 7,5 litert ($15/2$), akkor épp félig lesz a tartály (a kivett mennyiség 7,5-del nő, a benne maradó mennyiség 7,5 literrel csökken)

Tehát:

$$\frac{5}{6}(x - 25) - 7,5 = \frac{x}{2}$$

az egyenlet mindkét oldalát szorozva 6-tal:

$$5(x - 25) - 45 = 3x$$

átrendezés után:

$$x = 85$$

Ellenőrzés: 85 literből kivesznek 25 litert, majd a maradék 60 literből kivesznek 10 litert, marad 50 liter, ami 15 literrel több, mint a kivett 35 liter.

A

20. Egy osztály tanulóinak $\frac{5}{6}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, 40 %-a pedig közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban, ha az osztálylétszám 30?

Jelölje a rossz/közepes/jó tanulók számát R , K és J

Tudjuk, hogy az osztálylétszám 30, azaz $R + K + J = 30$

Az osztály ötöthoda közepesnél nem rosszabb: $K + J = \frac{5}{6} \cdot 30 = 25$

Az osztály 40%-a közepesnél nem jobb: $R + K = 0,4 \cdot 30 = 12$

Mindezekből:

$$\underbrace{(R + K)}_{\substack{\text{közepesnél} \\ \text{nem jobb}}} + \underbrace{(K + J)}_{\substack{\text{közepesnél} \\ \text{nem rosszabb}}} - \underbrace{(R + K + J)}_{\text{osztálylétszám}} = K = 12 + 25 - 30 = 7$$

Tehát a közepesre álló tanulók száma 7.

Másik (halmazos) megoldás:

$$\underbrace{|R + K|}_{\substack{\text{közepesnél} \\ \text{nem jobb}}} + \underbrace{|K + J|}_{\substack{\text{közepesnél} \\ \text{nem rosszabb}}} - \underbrace{|K|}_{\text{közepesek}} = \underbrace{|O|}_{\text{osztálylétszám}} \Rightarrow 12 + 25 - |K| = 30 \Rightarrow |K| = 7$$

D

21. Feri és az apja együtt 51 évesek. Feri és az anyja együtt 49 évesek. Hány éves Feri, ha a szülei együtt 74 évesek?

A rendelkezésre álló adatokból felírható az alábbi képlet:

$$\underbrace{(K_{Feri} + K_{apa})}_{51 \text{ év}} + \underbrace{(K_{Feri} + K_{anya})}_{49 \text{ év}} - \underbrace{(K_{apa} + K_{anya})}_{74 \text{ év}} = 2 \cdot K_{Feri} = 26 \text{ év}$$

amiből következik, hogy Feri életkora 13 év.

D

22. Egy csiga egy 20 méter mély gödörbe esett. Nappal 5 métert mászik felfelé, de éjjel 4 métert visszacsúszik. Hányadik napon szabadul ki?

1. napon: 0 m \rightarrow 5 m (ezután éjszaka visszacsúszik 4 m-t)

2. napon: 1 m \rightarrow 6 m (ezután éjszaka visszacsúszik 4 m-t)

...

15. napon: 14 m \rightarrow 19 m (ezután éjszaka visszacsúszik 4 m-t)

16. napon: 15 m \rightarrow 20 m, azaz kimászott a gödörből, innen már nem csúszik vissza

D

23. A 75326X hatjegyű számban milyen számjegyet kell írni az X helyére, hogy a szám osztható legyen 36-tal?

$36 = 4 \cdot 9$, azaz a 4-gyel és 9-cel való oszthatóságot kell vizsgálni.

4-gyel: az utolsó két számjegyből alkotott szám osztható 4-gyel $\Rightarrow X \in \{0; 4; 8\}$

9-cel: a számjegyek összege osztható 9-cel: $9|(7 + 5 + 3 + 2 + 6 + X) = 23 + X \Rightarrow X \in \{4\}$

Tehát X helyére 4-et kell írni.

C

24. Paradicsom befőzésekor az egyik lábosban $11\frac{2}{3}$ liter, a másikban $7\frac{1}{12}$ liter paradicsom van. Legkevesebb hány darab $\frac{3}{4}$ literes üvegre van szükség az eltevéshez?

Összesen $11\frac{2}{3} + 7\frac{1}{12} = 18 + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = 18 + \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = 18\frac{3}{4}$ liter paradicsom van,

ami $\frac{18\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 18\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 18 \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 18 \cdot \frac{4}{3} + 1 = 24 + 1 = 25$ üvegbe éppen belefér, tehát legalább ennyire szükség van.

D

25. Egy kádat a melegvizes csap 45 perc alatt tölt meg. A meleg- és a hidegvizes csapot egyszerre megnyitva 18 perc alatt töltik meg. Mennyi idő alatt telik meg a kád, ha csak a hidegvizes csapot nyitjuk meg?

Legyen K a kád térfogata [liter],

és h, m a hideg- és melegvizes csapoknak az átfolyási sebessége $\left[\frac{\text{liter}}{\text{perc}}\right]$.

Tudjuk, hogy a melegvizes csap 45 perc alatt tölti meg a kádat, azaz $m = \frac{K}{45}$,

illetve, hogy a hideg- és melegvizes csap együtt 18 perc alatt, azaz: $h + m = \frac{K}{18}$

Amiből:

$$h = (h + m) - m = \frac{K}{18} - \frac{K}{45} = \frac{5K}{90} - \frac{2K}{90} = \frac{3K}{90} = \frac{K}{30}$$

azaz a hidegvizes csap 30 perc alatt tölti meg a kádat.

Másik megoldás:

Legyen K a kád térfogata, h a csak hidegvizes feltöltés ideje, és t pedig a közös, a hideg- és melegvizes feltöltés ideje!

$$t \cdot \frac{K}{45} + t \cdot \frac{K}{h} = t \cdot \frac{K}{18} \Rightarrow \frac{1}{45} + \frac{1}{h} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{27}{810} = \frac{1}{30} \Rightarrow h = 30$$

azaz a hidegvizes csap 30 perc alatt tölti meg a kádat.

D