XXVI. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny-2022-2023

I. kategória megoldások

1. **Hány darab nulla számjegyet tartalmaz az az egész szám, amely a 2022 ezredrészének az 500-szorosa?**

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

$\frac{2022}{1000} \cdot 500 = \frac{2022}{2} = 1011$ Az eredmény 1 db 0 számjegyet tartalmaz.

B

2. **Öt év múlva Karcsi háromszor annyi idős lesz, mint 3 éve volt. Hány éves most Karcsi?**

A) 5 **B) 6** **C) 4** **D) 8** **E) 7**

Karcsi jelenlegi életkora: k

Karcsi életkora 5 év múlva: $k + 5$

Karcsi életkora 3 éve: $k - 3$

A feltétel miatt: $k + 5 = 3(k - 3)$

$14 = 2k$

$k = 7$

Karcsi jelenleg 7 éves

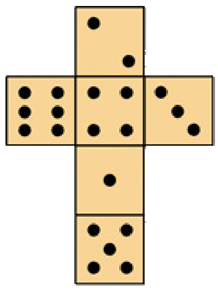
Ellenőrzés: $7 + 5 = 3(7 - 3)$

$12 = 12$ igaz, tehát a megoldás helyes

E

3. **Melyik az a kocka az alábbiak közül, amelyiknek a kiterített felszíne (hálója) biztos nem egyezik meg a jobb oldalon láthatóval?**

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 



A C lehetőségnél lévő kockán a négypöttyös és az ötpöttyös lapoknak van közös élük (egymás mellett vannak), ami a hálónál nem igaz, mert ott a háló visszahajtogatása után ezek a lapok egymással szemben (párhuzamosak) lesznek.
Megjegyzés: A többi eset lehetséges, de nem biztos. Nincs elég információnk, de annyi van, hogy nem zárhatjuk úgy ki egyiket sem, mint a C esetet.

C

4. **Hány megoldása van a $3x - 1 \leq -3(x - 2)$ egyenlőtlenségnek a természetes számok halmazán?**

A) 2 **B) 3** **C) 4** **D) 5** **E) végtelen**

$$3x - 1 \leq -3(x - 2)$$

$$3x - 1 \leq -3x + 6$$

$$6x \leq 7$$

$$x \leq \frac{7}{6} = 1{,}1\dot{6}$$

Az egyenlőtlenségnek így a természetes számok halmazán (N) 2 db megoldása van, mégpedig az $x = 1$ és az $x = 0$.

A

5. **Ha $3a - (2a - (a - 1)) = 2023$, akkor az a értéke**

A) 1350 **B) −1** **C) 405** **D) 1012** **E) 0**

Bontsuk fel a zárójeleket bentről kifelé haladva:

$$3a - (2a - a + 1) = 2023$$

$$3a - 2a + a - 1 = 2023$$

$$2a = 2024$$

$$a = 1012$$

Megjegyzés: más felbontási sorrend szerint is ezt az eredményt kell kapnunk.

D

6. **Hány olyan egész szám van, amelyet százasra kerekítve, 2000-et kapunk eredményül?**

A) 50 **B) 49** **C) 51** **D) 99** **E) 100**

A kerekítés szabályait figyelembe véve a legkisebb ilyen szám az 1950, a legnagyobb pedig a 2049.

Ezek a számok tehát növekvő sorrendben: $1950;\ 1951;\ \dots\ 2000;\ \dots\ 2048;\ 2049$

Ezeknek a négyjegyű számoknak a száma: $2049 - 1949 = 100$

E

7. **Gyuri papa osztálya eredeti létszámának $\frac{6}{11}$ része fiú volt. Félévkor 1 új lány érkezett az osztályba, de egy fiú másik iskolába ment át, így a lányok és fiúk száma azonos lett. Mennyi volt az eredeti osztálylétszám?**

A) 33 **B) 34** **C) 22** **D) 44** **E) 25**

Jelöljük az osztály eredeti létszámát x-szel!

Fiúk (eredeti) száma ekkor: $\frac{6}{11}x$

Lányok (eredeti) száma ekkor: $x - \frac{6}{11}x = \frac{5}{11}x$

Fiúk száma félévkor: $\frac{6}{11}x - 1$

Lányok száma félévkor: $\frac{5}{11}x + 1$

Feltételből következik: $\frac{6}{11}x - 1 = \frac{5}{11}x + 1$

$$\frac{1}{11}x = 2$$

$$x = 22$$

Az osztály eredeti létszáma 22 fő.

Ellenőrzés: $\frac{6}{11} \cdot 22 - 1 = \frac{5}{11} \cdot 22 + 1$

$11 = 11$ igaz, tehát a kapott osztálylétszám helyes.

C

8. **Melyik számmal nem osztható a $10^{2022} + 8$?**

A) 2 **B) 4** **C) 6** **D) 8** **E) 16**

A $10^{2022} + 8$ páros szám, ezért osztható kettővel; 08-re végződik, ezért osztható 4-gyel is; a számjegyek összege $1 + 8 = 9$, így osztható 6-tal is (páros és 3-mal is osztható); mivel 008-ra végződik, ezért 8-cal is osztható. A verseny szabályainak (pontosan egy helyes válasz van) megfelelően, kizárásos alapon így a $10^{2022} + 8$ csak 16-tal nem osztható.

Ennek indoklása: a $10^{2022} + 8$ kéttagú összeg első tagja osztható 16-tal $(= 2^4)$, mivel prímtényezős felbontásában szerepel a 2^{2022}, mivel $10^{2022} = 2^{2022} \cdot 5^{2022} \Rightarrow 2^4 | 2^{2022}$, így ahhoz, hogy az összeg osztható legyen 16-tal, a második tagnak is oszthatónak kellene lenni 16-tal, de a 16 nem osztója a 8-nak.

Indoklás másképpen:

Alakítsunk szorzattá, emeljük ki az összegből a 8-at: $10^{2022} + 8 = 2^{2022} \cdot 5^{2022} + 2^3 = 2^3(2^{2019} \cdot 5^{2022} + 1)$. Ebben a szorzatban a második tényező páratlan (páros+1), így az nem osztható 2-vel, nincs a prímtényezős felbontásában 2, ezért a szorzat 2 hatványai közül legfeljebb csak $2^3 = 8$-cal osztható, $16 = 2^4$-nel már nem.

E

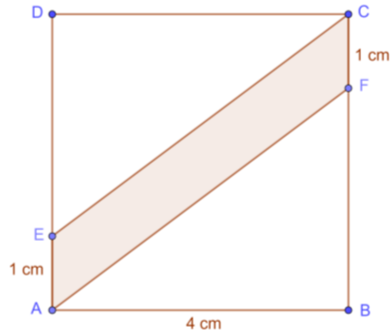
9. Ha tudjuk, hogy $(a+2022)^2 + |b-2023| = 0$, akkor mennyi lesz az $a+b$ összeg értéke?

A) 0 B) 1 C) 2022 D) 2023 E) 2024

Az egyenlet bal oldalán álló kéttagú összeg minden tagja nemnegatív (≥ 0) a négyzetre emelés, illetve az abszolút érték miatt. Ez az összeg így csak akkor lehet 0, ha mindkét tagja egyszerre 0 lesz. Az első tag akkor lesz 0, ha $a = -2022$, a második tag pedig akkor lesz 0, ha $b = 2023$. Így a keresett összeg: $a + b = -2022 + 2023 = 1$

B

10. Az ábrán látható 4 cm oldalú $ABCD$ négyzet kerületének hány százaléka lesz az $AFCE$, sötétebb színnel jelölt négyszög kerülete, ha $AE = CF = 1$ cm?



A) 45 B) 65 C) 55 D) 50 E) 75

A négyzet tulajdonságai miatt a sötétebb színnel jelölt négyszög (paralelogramma) ismeretlen oldalai egy-egy (egybevágó) derékszögű háromszög átfogói. Ezen oldalak hossza Pitagorasz-tétellel kiszámítható. A befogók a megadott adatok alapján:

$$AB = 4 \text{ cm és } BF = 4 - 1 = 3 \text{ cm}$$

Pitagorasz tételéből: $3^2 + 4^2 = AF^2 \Rightarrow AF = 5$ cm

Az egybevágóság miatt: $AF = CE$

A sötétebb négyszög kerülete: $2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 12$ cm

Az $ABCD$ négyzet kerülete: $4 \cdot 4 = 16$ cm

Kerületek %-os viszonya: $\frac{k_{AFCE}}{k_{ABCD}} \cdot 100 = \frac{12}{16} \cdot 100 = 0{,}75 \Rightarrow 75\%$

A sötétebb színnel jelölt négyszög kerülete 75 %-a az $ABCD$ négyzet kerületének.

E

11. Az alábbiak közül hány függvénynek az értelmezési tartománya nem a valós számok halmaza?

$$f(x) = x - 2;\ g(x) = \frac{12}{x};\ h(x) = (x+3)^2;\ i(x) = x^2;\ j(x) = \frac{1}{|x|+1}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

A felsorolt függvények közül a $g(x) = \frac{12}{x}$ függvény értelmezési tartományába nem tartozik bele az $x = 0$, mivel ebben az esetben a nevező 0 lesz, amivel értelmetlen az osztás. A többi függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Így a fentiek közül egy függvénynek nem lesz az értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

A

12. Patrik két szabályos dobókockát egyszerre feldob, majd a kockák felső lapján látható pöttyök számát összeadja. Mi az esélye (valószínűsége) annak, hogy az így kapott összeg legalább 10 lesz?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{11}$

Mivel mindkét kockán 6 lehetőség van, ezért a két kockán összesen $6 \cdot 6 = 36$ lehetőúség lesz, mivel az egyik kocka minden számához (pöttyéhez) a másik kocka 6 száma (pöttye) kapcsolódhat.

Összes lehetőségek száma: 36

Össze kell számolni a kedvező $(10;\ 11;\ 12)$ lehetőségek számát:

$10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$ 3 lehetőség

$11 = 5 + 6 = 6 + 5$ 2 lehetőség

$12 = 6 + 6$ 1 lehetőség

Kedvező lehetőségek száma: $3 + 2 + 1 = 6$

A keresett esély (valószínűség): $P(10; 11; 12) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Megjegyzés: figyelni kell arra, hogy pl. a $4 + 6$ és a $6 + 4$ eset két különböző lehetőség!

A

13. Anikó 31 db, méretre, anyagra azonos szalagocskát tett egy zárható, nem átlátszó dobozba. Közülük 15 db piros, a maradék egynegyede fehér, a többi zöld. Legalább hány kis szalagocskát kell kivenni a dobozból látatlanban, hogy biztosan legyen közöttük mindhárom színből legalább egy?

A) 20 **B) 4** **C) 3** **D) 17** **E) 28**

Összes szalag: 31 db

Piros szalag: 15 db

Maradék szalag: $31 - 15 = 16$ db

Fehér szalag: $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ db

Zöld szalag: $16 - 4 = 12$ db

Skatulya-elv: maximum („legrosszabb” esetben, legtöbbet) ki tudunk venni 12 piros+15 zöld= 27 db szalagot, hogy ne legyen a harmadik (fehér) színből egy db sem (mindegyik nem fehéret ki kell venni). Ekkor már csak fehér szalag maradt. A következő, a 28. db, ami már biztos fehér, kivételekor már biztosan lesz mind a három színből egy-egy db.

Tehát legalább 28 kis szalagocskát kell kivenni a dobozból látatlanban, hogy biztosan legyen közöttük mindhárom színből legalább egy?

Megjegyzés: természetesen lehet, hogy már három szalag kihúzásakor is teljesül a feltétel (1 piros, 1 fehér, 1 zöld), de ez nem biztos.

E

14. Legyen az A halmaz a -2023-nál nagyobb, de az 1956-nál nem nagyobb valós számok halmaza, a B halmaz pedig a 26-nál nem kisebb, de a 2023-nál kisebb valós számok halmaza! Hány egész szám van a két halmaz metszetében?

A) 4047 B) 4046 C) 2023 D) 1931 E) 1930

A kérdésre úgy is válaszolhatunk, ha megkeressük az A és a B halmaznak az egész számokból álló részhalmazát, majd azoknak vesszük a metszetét $\{(A \cap B)_{egész} = A_{egész} \cap B_{egész}\}$, közös részét.

Az A halmazba tartozó egész számok: $-2022;\ -2021;\ \dots\ 1955;\ 1956$

A B halmazba tartozó egész számok: $26;\ 27;\ \dots\ 2021;\ 2022$

A két, egész számokból álló halmaz metszetének elemei: $26;\ 27;\ \dots 1955;\ 1956$

Ez $1956 - 25 = 1931$ db egész szám, ami válasz a feltett kérdésre.

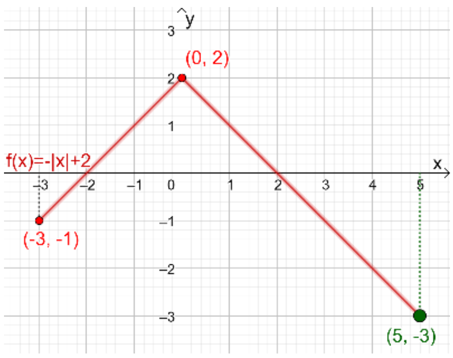
Megjegyzés: a feladatot nehezítik a nem nagyobb ($\leq$), illetve a nem kisebb ($\geq$) relációk

D

15. A $[-3; 5]$ számhalmazon értelmezett és az $f(x) = -|x| + 2$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény legkisebb értéke:

A) 2 B) 0 C) -5 D) -3 E) -1

A megadott, zárt intervallumon értelmezett függvény maximumát ($f(0) = 2$) és növekedési viszonyait (szigorúan monoton nő és szigorúan monoton csökken) figyelembe véve a minimális értéket a zárt intervallum végpontjaiban veheti fel.



Mivel $f(-3) = -1$ és $f(5) = -3$, így az $f(x)$ függvény a minimális értékét az $x = 5$ helyen veszi fel, $f(5) = -3$.

Megjegyzés: természetesen rájöhetünk a megoldásra úgy is, ha a függvény grafikonját megrajzoljuk az adott intervallumon, hiszen ez könnyen megtehető, pontos eredményhez vezet.

D

16. Hány darab számjegyet kell leírni a $\frac{4}{7}$ tizedes tört alakjából (a tizedesvesszőtől jobbra kezdődően) úgy, hogy ezek összege pontosan 270 legyen?

A) 30 B) 31 C) 2022 D) 571428 E) 60

Írjuk fel a $\frac{4}{7}$ vonalas (közönséges) tört tizedes tört alakját! Mivel $\frac{4}{7}$ racionális szám, ezért tizedes tört alakja egész (ez most nem jöhet számításba), vagy véges vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört lehet. Az átírásból kitűnik, hogy végtelen szakaszos tizedes tört lesz. A szakasz hosszát és a benne lévő számjegyek összegét kell megállapítani.

$$\frac{4}{7} = 0{,}\underbrace{571428}_{27}\underbrace{571428}_{27}\underbrace{571428}_{27}\dots = 0{,}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}$$

A szakaszok hossza 6, a szakaszokban lévő számjegyek összege pedig 27, így $\frac{270}{27} = 10$ szakaszt kell leírni, ami $10 \cdot 6 = 60$ számjegy leírását teszi szükségessé, hogy a számjegyek összege éppen 270 legyen.

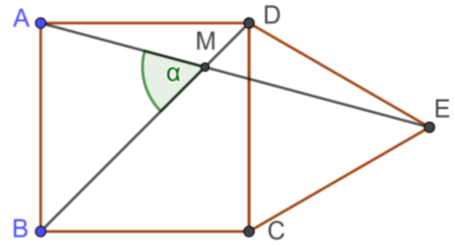
E

17. Ha az ábrán az $ABCD$ egy négyzet, a DCE pedig egy szabályos háromszög, akkor az $\propto = AMB\sphericalangle$ mértéke:

A) 50° **B) 40°** **C) 45°** **D) 60°** **E) 30°**

$ADE\sphericalangle = 90° + 60° = 150°$ (négyzet, szabályos háromszög)

$AD = DE \Rightarrow DAE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 15°$ (egyenlő szárú háromszög, a háromszög belső szögeinek összege $180°$)



$ADM\sphericalangle = 45°$ (négyzet átlója felezi a derékszöget)

$AMD\sphericalangle = 180° - 15° - 45° = 120°$ (belső szögek összege $=180°$)

$\alpha = AMB\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$ (AMD háromszög $AMD\sphericalangle = 120°$-os belső szög melletti külső szöge)

D

18. Adott két különböző valós szám. Mindkettőre teljesül, hogy négyzete eggyel nagyobb a másik számnál. Mennyi a két szám összege?

A) -2 **B) -1** **C) 1** **D) 2** **E) 3**

Jelöljük a keresett (különböző valós) számokat a-val és b-vel!

A feltételek szerint:

$$\left.\begin{aligned} a^2 - 1 = b \\ b^2 - 1 = a \end{aligned}\right\}$$

Kivonva az első feltételből a másodikat:

$$a^2 - b^2 = b - a$$

Rendezve, 0-ra redukálva:

$$a^2 - b^2 - b + a = 0$$

Szorzattá alakítás (nevezetes azonosság, kétszeri kiemelés):

$$(a - b)(a + b + 1) = 0$$

Egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0:

$$a \neq b \Rightarrow a - b \neq 0 \Rightarrow a + b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

Így a keresett két szám összege $a + b = -1$

B

19. Hány olyan kétjegyű természetes szám van, amelynek pontosan öt pozitív osztója van?

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Ha a keresett szám prímtényezős felbontásában két prím szerepelne, és mind a kettő első hatványon, akkor ennek a számnak 4 db osztója lenne, ez még kevés.

Ha a keresett szám prímtényezős felbontásában három prím szerepelne, és mind a három első hatványon, akkor ennek a számnak már 8 db osztója lenne, ez már sok. Ha növeljük a prímek számát, még több lesz.

Ha a keresett szám prímtényezős felbontásában két prím szerepelne, az egyik első hatványon, a másik másodikon, akkor ennek a számnak már 6 db osztója lenne. Ez is sok. Ha itt növeljük a kitevőket, még több lesz.

Csak azok a kétjegyű számok jöhetnek számításba, amelyekben egyfajta prímtényező szerepel.

Lehetőségek, figyelembe véve a kétjegyű feltételt:

$2^4 = 16$ osztói: $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16\ \Rightarrow$ 5 db osztó

$3^4 = 81$ osztói: $1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81 \Rightarrow$ 5 db osztó

Csak ez a két szám felel meg a feltételeknek: ha növeljük a kitevőt, akkor több osztó lesz, ha csökkentjük a kitevőt, akkor kevesebb osztó lesz, ha marad a kitevő 4, és az alapot növeljük, akkor kettőnél többjegyű számot kapunk (pl. $5^4 = 625$).

Megjegyzés:

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha felhasználjuk a következő tételt: egy természetes szám pozitív osztóinak számát úgy kapjuk meg, hogy a prímtényezős felbontásában vesszük a különböző prímek kitevőit, azokat eggyel megnöveljük és összeszorozzuk. Ha ezzel dolgozunk, eljutunk oda az elemzés során, hogy csak egyféle prímtényező lehet, annak is négy kell legyen a kitevője. Így a keresett számok a $2^4 = 16$ és a $3^4 = 81$.

Tétel: Ha n természetes szám, és n prímtényezős felbontása $n = p_1^{z_1} \cdot p_2^{z_2} \dots p_{k-1}^{z_{k-1}} \cdot p_k^{z_k} \Rightarrow n$ pozitív osztóinak száma $= (z_1 + 1)(z_2 + 1) \dots (z_{k-1} + 1)(z_k + 1)$.

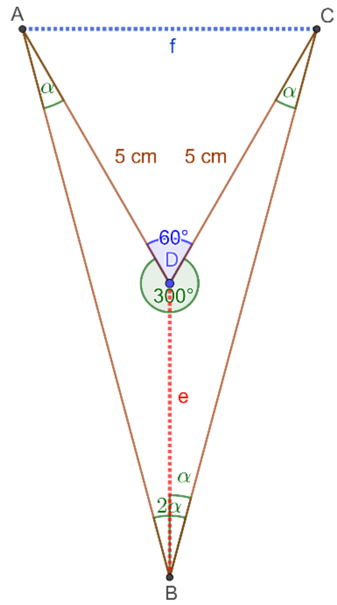
C

20. A Jutka által rajzolt (konkáv) deltoid rövidebb oldalának hossza 5 cm, egyik szögének nagysága 300°. Ezzel a szöggel szemben fekvő szöge pedig kétszerese a deltoid valamelyik szögének. Hány centiméter a deltoid két átlója hosszának az összege?

A) 10 **B) 7** **C) 8** **D) 6** **E) 5**

A feltétel és a deltoid tulajdonságai alapján: $300^\circ + \alpha + 2\alpha + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

A deltoid tengelyes szimmetriája miatt: $DBC\sphericalangle = \alpha = 15^\circ$



DBC háromszög szögei: 15°; 15°; $150^\circ \Rightarrow DBC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow CD = BD = e = 5$ cm

Az ADC háromszögben a D csúcsnál lévő szög 60°-os a feltétel (300°, teljes szög) miatt.

Mivel az ADC háromszög egyenlő szárú, és a két egyenlő szára (5 cm) zárja be ezt a 60°-os szöget, így az ADC háromszög szabályos, minden oldala egyenlő 5 cm-rel $\Rightarrow AC = f = 5$ cm.

A két átló hosszának összege: $e + f = 5 + 5 = 10$ cm

Megjegyzés: nyilvánvaló, hogy a deltoid rövidebb oldalai az $AD = CD = 5$ cm, mivel az $AB = BC$ oldalak ennél hosszabbak, mivel pl. az ABC háromszögben a nagyobb szöggel ($150^\circ > 15^\circ$) szemben fekszenek, valamint nem lehet a két hosszabb oldal által bezárt szög 300°, mert így nem lenne megszerkeszthető a deltoid.

A

21. A Jancsi által megadott alábbi számhármasok közül melyik lehet egy hegyesszögű háromszög három oldalának (cm-ben értendő) hossza?

A) $(3; 4; 5)$ **B) $(8; 4; 3)$** **C) $(6; 7; 9)$** **D) $(5; 12; 13)$** **E) $(1; 2; 3)$**

A $(3; 4; 5) \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$, és az $(5; 12; 13) \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow 25 + 144 = 169$ számhármasok Pitagoraszi számhármasok, így ezek derékszögű háromszög odalai.

A $(8; 4; 3) \Rightarrow 8 > 4 + 3$, és az $(1; 2; 3) \Rightarrow 1 + 2 = 3$ számhármasok egyike sem felel meg a háromszög-egyenlőtlenségnek, így ezekkel háromszög sem szerkeszthető.

A verseny szabályainak megfelelően (pontosan egy helyes válasz van) kizárásos alapon a $(6; 7; 9)$ számhármas számai lehetnek egy hegyesszögű háromszög oldalhosszúságai.

Megjegyzés: hamarabb el lehet jutni a megoldáshoz, ami a válasz pontos indoklása is, ha felhasználjuk azt az összefüggést, ha egy háromszög két rövidebb oldala négyzetének összege nagyobb a harmadik oldal négyzeténél, akkor az a háromszög hegyesszögű ($6^2 + 7^2 > 9^2 \Rightarrow 85 > 81$).

C

22. A Bergengóc lottósorsoláson az első 45 pozitív egész számból húznak ki hat számot egymás után, visszatevés nélkül. Ha tudjuk, hogy az első öt kihúzott szám átlaga 28, valamint azt, hogy a hat kihúzott szám átlaga 30, akkor mi volt az utoljára kihúzott szám?

A) 35 B) 45 C) 30 D) 40 E) 25

Használjuk fel az átlagszámítás (számtani közép) egyszerű tulajdonságát, miszerint az adatok összege megegyezik az átlaguknak és az adatok (darab)számának a szorzatával:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \Rightarrow n \cdot \bar{a} = a_1 + \cdots + a_n$$

Mivel az első öt kihúzott szám átlaga 28 , ezért ezek összege $5 \cdot 28 = 140$

Mivel a hat kihúzott szám átlaga 30, ezért ezek összege $6 \cdot 30 = 180$

Így az utoljára kihúzott szám $180 - 140 = 40$

D

23. A kétjegyű pozitív egész számok halmazának képeztük az összes részhalmazát. Hány elemű halmaz a kapott részhalmazok uniója?

A) 89 B) 90 C) 2^{89} D) 2^{90} E) $90 \cdot 2^{90}$

Kétjegyű pozitív szám 90 db van: $\underbrace{10; 11; \ldots; \ 98; 99}_{90\ db}$

Ha képezzük az összes részhalmazt, akkor minden pozitív kétjegyű szám valamelyik (többnek is) részhalmaznak eleme lesz. Mivel új szám nem vesz részt a részhalmazok képzésében, ezért a részhalmazok tartalmazzák az összes pozitív kétjegyű számot, így az uniójuk 90 elemű lesz, megegyezik a pozitív kétjegyű számok számával.

B

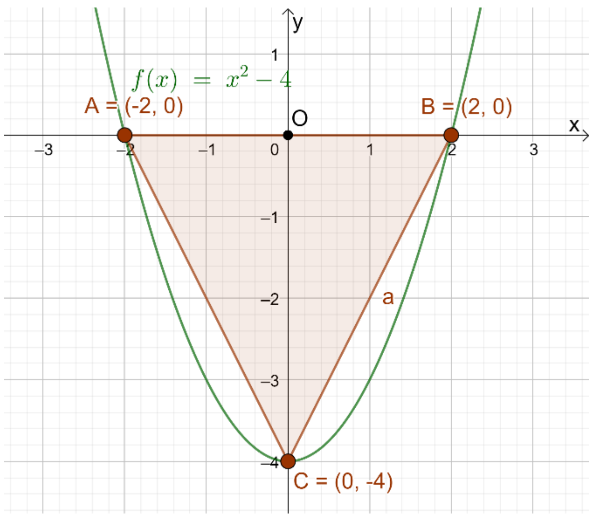
24. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4$ függvény grafikonjának és az x-tengelynek két közös pontja van, A és B, a grafikon és az y-tengely metszéspontja pedig C. István kiszámolta, hogy hány területegység az ABC háromszög területe. Mennyit kapott eredménborn?

A) 8 B) 16 C) 24 D) 4 E) 32

Az y-tengellyel való metszéspont meghatározása: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -4 \Rightarrow C(0; -4)$

Az x-tengellyel való metszéspontok meghatározása: $f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow$

$A(-2; 0)$ és $B(2; 0)$



Ezen adatok alapján az ABC háromszög egyenlő szárú, amelynek alapja $AB = 4$ és az alaphoz tartozó magassága pedig $OC = 4$.

Az ABC háromszög területe: $t_{ABC} = \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$

Megjegyzés: természetesen a tengelyekkel való metszéspontokat az $f(x)$ függvény grafikonjának megrajzolásával is könnyen megkaphatjuk.

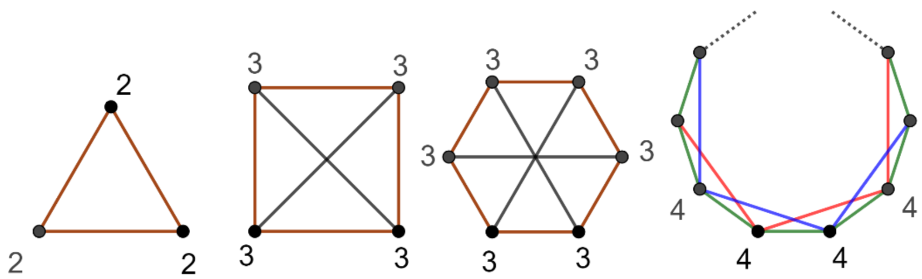
A

25. Zsófi azt állítja, hogy egy n fős társaság esetén mindenkinek pontosan k darab ismerőse van (az ismeretség kölcsönös). Az alábbi öt eset közül melyik nem lehetséges?

A) $n = 3; k = 2$ **B)** $n = 4; k = 3$ **C)** $n = 5; k = 3$

D) $n = 6; k = 3$ **E)** $n = 2022; k = 4$

Az $n = 3; k = 2$, az $n = 4; k = 3$, az $n = 6; k = 3$ ismeretségek gráfját könnyű megrajzolni, azok nyilván lehetségesek (első három ábra).



$(n = 3; k = 2)$ $(n = 4; k = 3)$ $(n = 6; k = 3)$ $(n = 2022; k = 4)$

Az $n = 2022; k = 4$ eset ismeretségi gráfjának egy lehetséges konstrukciója: mindenki ismeri a közvetlen szomszédját (zöld élek, zárt 2022-szög, gráfelméleti kör, $2 - 2$ ismeretség), és mindenki ismeri még minden párosadik $(2.;\ 4.;\ \ldots 2020.)$ szomszédját is (piros, illetve kék élek, zárt 1011-szögek, gráfelméleti kör, további $2 - 2$ ismeretség). A piros és a kék gráfelméleti kör azért alakulhat ki, mert az eredeti létszám páros.

A verseny szabálya (pontosan egy helyes válasz van) miatt kizárásos alapon a helyes válasz: az $n = 5; k = 3$ nem lehetséges.

Az $n = 5; k = 3$ eset lehetetlenségének gráfelméleti indoklása: mivel az ismeretségek kölcsönösek, így a társaság tagjai ismeretségeinek összege (fokszámok összege) páros kell, hogy legyen (két tag kölcsönös ismeretségét az összegzésnél 2-nek kell venni). Mivel $n = 5; k = 3$ esetben az ismeretségek összege $n \cdot k = 5 \cdot 3 = 15$, ami páratlan, tehát ez az eset nem lehetséges.

Megjegyzés: a feladat megoldásához természetesen nem kellenek precíz gráfelméleti ismeretek.

C

A feladatsort és a megoldásokat összeállították, szerkesztették:

Bíró Bálint, **Hegyesi János**, **Herczeg Viktória**, **Horváth Ferenc Patrik**, **Marczis György**, **dr. Molnár István**, **Molnár Judit**, **dr. Rókáné Rózsa Anikó**, **Szabó Zsófia**