XXVI. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny, 2022
II. kategória
Megoldások
(Kosztolányi József)

1. $\frac{2^{\left(2^3\right)}}{\left(2^2\right)^3}=$

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ **(E)** 4

Megoldás: $\frac{2^{\left(2^3\right)}}{\left(2^2\right)^3}=\frac{2^8}{2^6}=4$

2. Mit kapunk, ha a 40-et elosztjuk $\frac{1}{5}$-del, és a hányadoshoz hozzáadunk 12-t?

(A) 20 **(B)** 212 (C) $\frac{52}{5}$ (D) 100 (E) 96

Megoldás: $\frac{40}{\frac{1}{5}}+12=40\cdot 5+12=212$

3. Marci a félév során a mai napig 10 matematika dolgozatot írt, elért pontszámainak átlaga 68. Hány pontot kapott a mai dolgozatára, ha ezzel együtt a 11 dolgozat pontátlaga 70 lett?

(A) 70 (B) 72 (C) 78 (D) 88 **(E)** 90

Megoldás: Ha a mai dolgozat x pontos, akkor $10\cdot 68+x=11\cdot 70$, ahonnan $x=90$.

4. Egy négyszög belső szögeinek nagysága fokokban mérve, pozitív körüljárás szerint haladva rendre x, $x+10$, $x+20$, $x+30$. Hány fokos a legnagyobb szög?

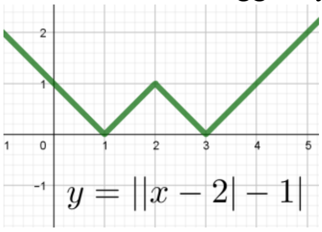
(A) 75 (B) 85 (C) 95 **(D)** 105 (E) 115

Megoldás: A négyszög belső szögeinek összegére $4x+60=360$, ahonnan $x=75$. Így a négyszög legnagyobb szöge 105°-os.

5. Ha az $\left||x-2|-1\right|=a$ egyenletnek pontosan három páronként különböző gyöke van, akkor az a egész szám értéke

(A) 0 **(B)** 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Megoldás: Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalán álló függvényt a valós számok halmazán.



A grafikonról leolvasható, hogy akkor lesz pontosan három páronként különböző megoldás, ha $a=1$.

6. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege 6?

(A) 28 (B) 19 **(C)** 21 (D) 18 (E) 27

Megoldás: Két darab 0 számjegyet tartalmazó szám 1 van, a 600.
Az egy darab 0-át tartalmazó számok másik két számjegye lehet 5, 1; 4, 2 illetve 3, 3. Az első két típusból 4 darab van, a harmadikból 2 darab.
A 0-t nem tartalmazó szám számjegyei lehetnek 1, 2, 3; 1, 1, 4 illetve 2, 2, 2. Az első típusból 6 darab van, a másodikból 3, a harmadikból 1.
Így összesen $1+4+4+2+6+3+1=21$ darab megfelelő háromjegyű szám van.

7. Feldobunk egy sárga és egy kék szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sárgával több pontot dobunk, mint a kékkel?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

Megoldás: Az összes esetek száma 36. A kedvező eseteket a sárga kockával dobott pontok szerint érdemes összeszámolni.

sárga kockával dobot pont:	1	2	3	4	5	6
kedvező esetek száma:	0	1	2	3	4	5

Így a keresett valószínűség: $P=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

8. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 86°-os. Az alábbiak közül melyik lehet a háromszög egy másik szögének fokokban mért értéke?

(A) 8 (B) 94 (C) 57 (D) 4 (E) 43

Megoldás: Ha a 86°-os szög a szárak által bezárt szög, akkor az alapon fekvő szögek 47°-osak.
Ha az alapon fekvő egyik szögek 86°-osak, akkor a szárak által bezárt szög 8°-os.

9. Ha $y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, akkor $y^2=$

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{x-x^2}$ (C) $\frac{1-2x+2x^2}{x-x^2}$ (D) $\frac{1-x+x^2}{x-x^2}$ (E) $\frac{1+2x^2}{x-x^2}$

Megoldás: $y^2=\frac{x}{1-x}+\frac{1-x}{x}+2=\frac{x^2+(1-x)^2+2x-2x^2}{x-x^2}=\frac{1}{x-x^2}$

10. Ha p és q olyan pozitív egészek, amelyekre $\frac{7}{10}<\frac{p}{q}<\frac{11}{15}$, akkor q lehetséges legkisebb értéke

(A) 25 (B) 60 (C) 30 **(D)** 7 (E) 6

Megoldás: A lehetséges válaszok közül érdemes a legkisebbel kezdeni. Mivel $\frac{4}{6}<\frac{7}{10}$ és $\frac{11}{15}<\frac{5}{6}$, ezért 7 lehet a legkisebb nevező. Ez jó, ugyanis $\frac{7}{10}<\frac{5}{7}<\frac{11}{15}$.

11. Három szám páronkénti összegei rendre 38, 44, 52. Ekkor a legnagyobb szám

(A) 31 (B) 28 (C) 24 **(D)** 29 (E) 27

Megoldás: A számok legyenek *a, b, c*, és tegyük fel, hogy $a \le b \le c$. Így a páronkénti összegek: $a+b=38$, $a+c=44$, $b+c=52$. A második egyenletből kivonva az elsőt, majd a kapott egyenletet hozzáadva a harmadik egyenlethez kapjuk, hogy $2c=58$, ahonnan $c=29$.

12. Egy férfi egy állami hivatalban egy rejtvénnyel válaszolt arra a kérdésre, hogy „Hány éves?" A rejtvény így szólt: „Egy kocka éleinek számát szorozza meg öttel, adja hozzá a kocka lapjai számának négyszeresét, majd ebből az összegből vonja ki a csúcsok számának kétszeresét. Ha jól számolt, pont az éveim számát kapja." Hány éves a férfi?

(A) 48 (B) 56 (C) 60 (D) 64 **(E)** 68

Megoldás: $12\cdot 5+6\cdot 4-8\cdot 2=68$

13. $n=9+99+999+...+99...9$, ahol az utolsó tag 999 darab 9-es számjegyből áll. Az összeadások elvégzése után hány darab 1-es számjegyet tartalmaz *n*? (Minden szám tízes számrendszerbeli.)

(A) 996 (B) 998 **(C)** 999 (D) 1000 (E) 1001

Megoldás: Ha *n* minden tagjához 1-et adunk, akkor egy olyan 1000 jegyű számot kapunk, amelynek első 999 darab számjegye 1, az utolsó pedig 0.

Így $n=11...10-999=11...10000+(1110-999)=11...10000+111=11...10111$.

A kapott 1000 jegyű számban egyetlen 0 számjegy van, ezért az 1-esek száma 999.

14. Ha az *x* valós számra teljesül az $x^2<|2x-8|$ egyenlőtlenség, akkor

(A) $-2<x<4$ (B) $0<x<2$ **(C)** $-4<x<2$ (D) $-4<x<4$ (E) $4<x$

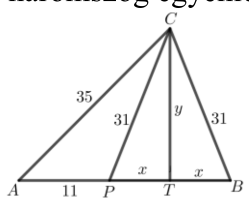
Megoldás: Ha $4\le x$, akkor $x^2-2x+8<0$, ami egyetlen valós *x*-re sem teljesül.

Ha $x<4$, akkor $x^2+2x-8<0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $-4<x<2$.

15. Az *ABC* pozitív körüljárási irányban betűzött háromszög két oldalának hossza: $BC=31$ $CA=35$. *P* az *AB* oldal pontja úgy, hogy $PA=11$ és $PC=31$. Ekkor $PB=$

(A) 10 (B) 11 (C) 12 **(D)** 13 (E) 14

Megoldás: A feltételek alapján a *PBC* háromszög egyenlő szárú ($PC=BC=31$).



Az ábra jelöléseit használva Pitagorasz tétele alapján:

(1) $(11+x)^2+y^2=35^2$

(2) $x^2+y^2=31^2$

(1)-ből kivonva (2)-t: $22x+11^2=35^2-31^2=264=11\cdot 24$, ahonnan $2x(=PB)=24-11=13$.

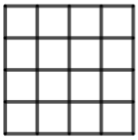
16. *p* és *q* olyan pozitív valós számok, amelyekre $p+q=n$ és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=m$. Ekkor $(p-q)^2=$

(A) n^2 (B) n^2-m (C) $\frac{n^2-m}{n}$ **(D)** $\frac{mn^2-4n}{m}$ (E) n^2-4mn

Megoldás: Mivel $m = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq} = \frac{n}{pq}$, ezért $pq = \frac{n}{m}$. Ezt felhasználva

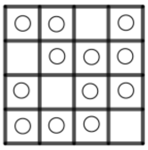
$$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = n^2 - \frac{4n}{m} = \frac{mn^2 - 4n}{m}.$$

17. Marci az ábrán látható tábla mezőire úgy akar egyforma korongokat elhelyezni, hogy minden egyes mezőre legfeljebb egy korong kerüljön, és minden sorban, oszlopban és átlóban legfeljebb három korong legyen. Legfeljebb hány korongot tud Marci a táblára tenni?



(A) 9 (B) 10 (C) 11 **(D)** 12 (E) 13

Megoldás: Mivel minden sorba legfeljebb három korong kerülhet, ezért legfeljebb 12 korong rakható fel a táblára. Ez meg is valósítható, amint azt az ábrán látható.



18. Kata 4 km/h sebességgel gyalogol és 6 km/h sebességgel fut. Ha az iskola és a házuk közötti távolságot nem gyalog, hanem futva teszi meg, akkor 3,75 perccel hamarabb ér haza. Hány kilométerre van az iskola Kata otthonától?

(A) 1,25 (B) 3,75 (C) 7,5 **(D)** 0,75 (E) Nem határozható meg egyértelműen.

Megoldás: Ha *s* a kérdéses távolság km-ben mérve, akkor $\frac{s}{4} = \frac{s}{6} + \frac{3,75}{60}$. Innen $s = 0,75$.

19. Három kör páronként kívülről érinti egymást. A középpontjaik által meghatározott háromszög oldalai 8, 9 és 13 egység hosszúak. Hány egység a legnagyobb kör sugara?

(A) 6 (B) 6,5 **(C)** 7 (D) 7,5 (E) 8

Megoldás: Ha a körök sugarát rendre *x*, *y*, *z* jelöli, és $x \le y \le z$, akkor

(1) $x + y = 8$

(2) $x + z = 9$

(3) $y + z = 13$

(2)-ből (1)-et kivonva, majd a kapott egyenletet (3)-hoz adva kapjuk, hogy $2z = 14$, ahonnan $z = 7$.

20. 21 háromféleképpen írható fel egymást követő pozitív egész számok összegeként: $10+11$; $6+7+8$; $1+2+3+4+5+6$. Hányféleképpen írható fel a 63 egymást követő pozitív egészek összegeként?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D)** 5 (E) 6

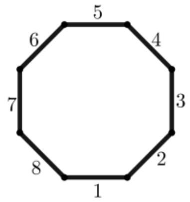
Megoldás: Két illetve három tagra könnyen adódik felbontás: $63 = 31 + 32$, $63 = 20 + 21 + 22$. Mivel 63 páratlan, ezért csak úgy bontható fel egymást követő pozitív egészek összegére, ha közöttük a páratlanok száma páratlan. Ezért négy pozitív egészre nem bontható fel. Könnyen látható, hogy öt megfelelő tagra sem bontható. Viszont hat illetve hét tag összegére felbontható:

$63=8+9+10+11+12+13$, $63=6+7+8+9+10+11+12$. Nyolc megfelelő tag összegére az említett okok miatt nem bontható fel, viszont kilenc tag összegére felbontható: $63=3+4+5+6+7+8+9+10+11$. Tíz tag összegére nem bontható fel, amint az könnyen ellenőrizhető. Mivel 1-től 11-ig összeadva az egész számok összege 66, ezért tovább már nem kell vizsgálódnunk.
Kaptuk, hogy 5 megfelelő felírás van.

21. Véletlenszerűen kiválasztjuk egy szabályos nyolcszög három oldalát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott oldalak egyenesei egy olyan háromszöget határoznak meg, amelyik lefedi a nyolcszöget?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{6}$ **(E)** $\frac{1}{7}$

Megoldás: Számozzuk meg a nyolcszög oldalait az egyszerűbb leírás végett.



Tegyük fel, hogy az 1 élt kiválasztottuk. Ekkor a következő háromszögek fedik le a nyolcszöget: 136, 163, 146, 164, 147, 174. Az 1 élhez $7\cdot 6=42$ módon lehet 2 élt választani, így a keresett valószínűség $\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$.

22. Beírtuk a pozitív egész számokat egy háromszög alapú számtáblázatba az ábrán látható módon. Melyik szám áll a táblázat 22. sorának 23. helyén?

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & 3 & 4 & & & \\ & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\ & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

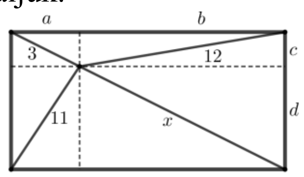
(A) 464 (B) 442 (C) 484 (D) 529 (E) 465

Megoldás: Az n-edik sorban $2n-1$ darab szám van, és az n-edik sor utolsó eleme n^2. (Ez utóbbi könnyen adódik abból a tényből, hogy $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.) Ezek alapján a 21. sor utolsó eleme 21^2, így a 22. sor 23. eleme $21^2+23=464$.

23. A pozitív körüljárási irányban betűzött *ABCD* téglalap *P* belső pontjára teljesül, hogy $PA=11\text{cm}$, $PC=12\,\text{cm}$ és $PD=3\,\text{cm}$. Milyen hosszú a *PB* szakasz centiméterben mérve?

(A) 20 **(B)** 16 (C) 18 (D) 14 (E) 13

Megoldás: Az ábra jelöléseit használjuk.



Pitagorasz tétele alapján felírhatók a következők:

(1) $a^2+c^2=9$; (2) $a^2+d^2=121$; (3) $b^2+c^2=144$; (4) $b^2+d^2=x^2$. (2)-ből (1)-et, majd (4)-ből (3)-at kivonva kapjuk, hogy $d^2-c^2=112$ illetve $d^2-c^2=x^2-144$. Innen $x^2=256$, $x=16$.

24. Az ábrán látható 9 pont közül hányféleképpen tudunk úgy 4 pontot kiválasztani, hogy a kiválasztott pontok közül semelyik három ne illeszkedjen egy egyenesre?

(A) 126 (B) 48 (C) 63 **(D)** 78 (E) 90

Megoldás: A 9 pont közül 4 pont kiválasztására $\binom{9}{4}=126$ lehetőség van. Azok az esetek nem felelnek meg, amelyekben valamelyik sor, valamelyik oszlop vagy valamelyik átló mindhárom pontja ki van választva. Ezek száma $8\cdot 6=48$, így a feltételnek megfelelő kiválasztások száma $126-48=78$.

25. Ha *n*! jelöli az első *n* darab pozitív egész szám szorzatát, akkor melyik az a legkisebb pozitív egész *n*, amelyre az *n*! pontosan 22 darab 0-ra végződik?

(A) 90 **(B)** 95 (C) 99 (D) 101 (E) 110

Megoldás: *n*! pontosan akkor végződik 22 darab 0-ra, ha a prímtényezős felbontásában 22 darab 5-ös tényező szerepel. A lehetséges válaszok alapján érdemes megvizsgálni a 100!-t. A 100! $\frac{100}{5}+\frac{100}{25}=24$ darab 0-ra végződik. Két darab 5-ös tényezőt kell kiküszöbölnünk, de a többit meg kell tartanunk. Mivel a 100 osztható 25-tel, ezért 99! már 22 darab 0-ra végződik. Így a legkisebb megfelelő szám a 95.