

## XXVI. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny-2022-2023

## III. kategória megoldások

1. Mennyi a 2022 háromszorosánál 2022-vel kisebb szám?

- A) 2022    B) 3033    **C) 4044**    D) 6066    E) 8088

$$2022 \cdot 3 - 2022 \cdot 1 = 2022 \cdot 2 = 4044$$

**C**

2. Az alábbi függvények közül melyik az elsőfokú (lineáris)?

- A)  $f_1 = 5$     **B)  $f_2 = 3 - 2x$**     C)  $f_3 = |x| + 4$     D)  $f_4 = \frac{1}{x-3}$     E)  $f_5 = x^2 + 5x + 6$

Az  $f_3$  függvény képe V-alakú (abszolútérték), az  $f_4$ -é hiperbola (lineáris törtfüggvény), az  $f_5$ -é parabola (másodfokú), így ezek egyike sem megoldás. Az  $f_1$  képe bár egy egyenes, de nulladfokú (konstans). A verseny szabályainak megfelelően (pontosan egy helyes megoldás van), marad az  $f_2$ , ami valóban elsőfokú.

**B**

3. Egy ember beszállt egy toronyház liftjébe, majd 2 emeletet ment le, ezután 4 emeletet fel, majd 6 emeletet le, utána 8 emeletet fel, így végül a 21. emeletre került. Hányadik emeleten szállt be a liftbe?

- A) 1.    **B) 17.**    C) 19.    D) 23.    E) 25.

Jelöljük  $n$ -nel azt az emeletet, ahol beszállt a liftbe!

$$\text{Ekkor } n - 2 + 4 - 6 + 8 = n + 4 = 21, \text{ amiből } n = 17.$$

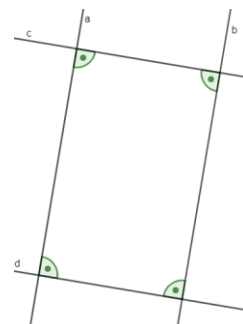
Tehát az emberünk a 17. emeleten szállt be a liftbe.

**B**

4. Adott a síkon négy különböző egyenes:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$ . Hány metszéspontjuk van összesen, ha az  $a$  egyenes párhuzamos a  $b$  egyenessel, a  $c$  egyenes párhuzamos a  $d$  egyenessel, és az  $a$  egyenes merőleges a  $d$  egyenesre?

- A) 0    B) 1    C) 3    **D) 4**    E) 5

Két párhuzamos egyenespár, amely párok egymásra merőlegesek. Az  $a$ ,  $d$ ,  $b$ ,  $c$  egyenesek egy téglalap oldalegyenesei, amelyeknek összesen 4 metszéspontja van (a téglalap csúcsai). Ki kell használni, hogy az egyenesek különbözőek, így a téglalap valóban létezik.



**D**

5. Egy mobiltelefon jelenleg 100000 forintba kerül. Hány Ft volt az eredeti ára, ha közben 25%-os áremelés következett be?

A) 125000 B) 75000 C) 95000 D) 25000 E) 80000

Jelölje  $x$  az eredeti árat forintban, ekkor  $x \cdot \frac{125}{100} = 100000$ , amiből  $x = 100000 \cdot \frac{100}{125} = 80000$ , azaz az áremelés előtt nyolcvanezer forint volt az ára.

E

6. Milyen hosszú az a téglalap alakú körbekerített játszótér, ha a hosszúsága háromszorosa a szélességének, a kerítése pedig 280 m?

A) 35 m B) 70 m C) 105 m D) 140 m E) 210 m

Jelölje  $a$  a játszótér rövidebb oldalának (szélességének) a hosszát!

Ekkor a terület:  $K = 2 \cdot (a + 3a) = 8a = 280$  m, amiből  $a = 35$  m.

A hosszabbik oldal  $3a = 105$  m hosszú.

C

7. Egy 10 tagú csoportban mindenki beszél az angol vagy a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélnek mindkét nyelvet?

A) 5 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

Legyen a keresett szám  $m$ .

Megoldás logikai szitával: legyen  $A$  az angolul,  $N$  a németül beszélők halmaza.

A szitaformula alapján:

$ A \cup N $	=	$ A $	+	$ N $	-	$ A \cap N $
angolul vagy németül beszélők száma		angolul beszélők száma		németül beszélők száma		mindkét nyelven beszélők száma

Az ismert értékeket behelyettesítve:  $10 = 8 + 6 - m$ , amiből  $m = 4$ , tehát négyen beszélnek mindkét nyelvet.

Megoldható a feladat, ha úgy gondolkodunk, hogy ha az angolul beszélők számához hozzáadjuk a németül beszélők számát, akkor a mindkét nyelvet beszélőket kétszer adtuk össze. Azért, hogy a létszám helyes legyen, őket egyszer ki kell vonni az összegből:  $8 + 6 - m = 10$ , amiből  $m = 4$ .

C

8. Hány megoldása van az  $5 - 3x \geq 0$  egyenlőtlenségnek a  $-3$ -nál nagyobb egész számok halmazán?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

Egyrésztől:  $5 - 3x \geq 0$ , amiből  $5 \geq 3x$ , amiből  $\frac{5}{3} \geq x$ .

Ennek megfelelő egész számok, az egyenlőtlenség egész megoldásai:  $\{\dots -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1\}$

Másrésztől:  $x > -3$ , amely feltételnek megfelelő egész számok  $\{-2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

A mindkét feltételnek megfelelő egész számok:  $\{-2; -1; 0; 1\}$ .

Ez összesen 4 db megoldás.

D

9. Hány háromjegyű szám képezhető a 0; 1; illetve a 2 számjegyekből, ha egy számban minden számjegyet csak egyszer használhatunk ezek közül?

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 6      E) 8

A feltételből az következik, hogy minden számjegyet pontosan egyszer kell felhasználni. Ezért a számjegyek összes sorrendje (permutációja) közül azokat keressük, ahol a 0 számjegy nem az első helyen áll (azok nem lennének háromjegyűek).

Ezek a 102, 120, 201, 210.

Így összesen 4 db háromjegyű szám képezhető a feltételek szerint.

**C**

10. Egy 45 m magas víztorony árnyéka 9 m. Milyen magas a mellette álló ember, ha az árnyéka 35 cm?

- A) 160 cm    B) 165 cm    C) 170 cm    D) 175 cm    E) 180 cm

Tudjuk, hogy a víztorony magassága és árnyékának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint az ember magassága és az ember árnyékának a hossza, hiszen a víztorony és az árnyéka, valamint az ember és az árnyéka által alkotott derékszögű háromszögek hasonlóak egymáshoz (megfelelő oldalak párhuzamosak).

Jelöljük a keresett magasságot  $h$ -val, ekkor:  $\frac{45 \text{ m}}{9 \text{ m}} = \frac{h}{35 \text{ cm}}$ ,

ami átrendezés után:  $h = \frac{45 \text{ m}}{9 \text{ m}} \cdot 35 \text{ cm} = 5 \cdot 35 \text{ cm} = 175 \text{ cm}$ , ez a válasz a kérdésre.

**D**

11. Egy jármű öthatod perc alatt 1250 m-t tesz meg. Ha ugyanilyen átlagsebességgel halad, hány méterre jut 20 másodperc alatt?

- A) 250      B) 300      C) 500      D) 1000      E) 1500

Öthatod perc az ötven másodperc, mert  $\frac{5}{6} \cdot 60 = 50$ .

Ha 50 s idő alatt 1250 m-t tesz meg, akkor 20 s idő alatt  $\frac{20}{50} \cdot 1250 \text{ m} = 500 \text{ m}$  távolságot tesz meg.

Felhasználtuk azt a fizikai törvényt, hogy a test által megtett út, ha az átlagsebesség nem változik, egyenesen arányos az eltelt idővel.

**C**

12. Egy háromszögben két szög egyenlő, a harmadik az előbbi kettő összege. Hány fokos a háromszög legnagyobb szöge?

A) 72      **B) 90**      C) 120      D) 130      E) 144

Jelölje a két egyenlő szöget  $\alpha$ .

Ekkor a háromszög belső szögeinek összege:

$$\alpha + \alpha + \underbrace{2\alpha}_{\substack{\text{harmadik} \\ \text{szög}}} = 180^\circ,$$

amiből  $\alpha = 45^\circ$  adódik, a legnagyobb szög pedig  $2\alpha = 90^\circ$  (tehát ez egy derékszögű háromszög).

**B**

13. Egy üres lapra leírtuk a BÉKÉS szó betűit az összes lehetséges sorrendben – soronként egyet-egyét. Hány sort írtunk a lapra?

A) 4      **B) 60**      C) 72      D) 5      E) 120

Isméltéses permutáció: 5 betűt  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  féle sorrendben lehet leírni, de ezen belül az „É” betűk sorrendje ( $2! = 2 \cdot 1$ ) nem lényeges, ha azokat egymás között felcseréljük, nem kapunk új sorrendet.

A BÉKÉS szó betűit  $\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$  sorrendben lehet leírni.

**B**

14. Ötszemélyes autókkal és 3 darab kilencszemélyes mikrobusszal el kell szállítanunk egy 87 tagú turistacsoportot. Hány autót rendeljünk, ha azt akarjuk, hogy minden férőhelyet kihasználjunk és minden turista egyidejűleg utazzék?

A) 5      B) 8      C) 9      D) 10      **E) 12**

A mikrobuszokkal összesen  $3 \cdot 9 = 27$  embert lehet elszállítani.

Marad  $87 - 27 = 60$  ember, őket  $\frac{60}{5} = 12$  db ötszemélyes autóval lehet elszállítani.

Ellenőrzés:  $12 \cdot 5 + 3 \cdot 9 = 87$

**E**

15. Peti édesanyja most 30 éves, két gyermeke pedig 3, illetve 7 éves. Hány év múlva lesznek a gyerekek együtt pontosan annyi idősök, mint az édesanyjuk lesz majd akkor?

A) 11      B) 40      C) 33      D) 35      **E) 20**

$n$  év múlva az anya életkora  $30 + n$  lesz, a gyerekeké  $3 + n$  és  $7 + n$ .

Keressük azt az  $n$ -et, amire a gyerekek együtt olyan idősök lesznek, mint az anya, azaz

$$30 + n = 3 + n + 7 + n = 10 + 2n$$

Átrendezés után  $n = 20$  adódik.

Ellenőrzés: 20 év múlva az anya 50 éves lesz, a gyerekek pedig 23 és 27 évesek.  $50 = 23 + 27$

**E**

16. Hány darab azonos tömegű virslit tartalmaz egy másfél kg-os virslisomag, ha közülük másfél pár virsli tömege összesen 15 dkg.

- A) 5      B) 10      C) 15      D) 20      E) 30

A másfél pár virsli az 3 db, tehát egy darab virsli  $\frac{15 \text{ dkg}}{3} = 5 \text{ dkg}$  tömegű.

Másfél kg virsli az 150 dkg, ami  $\frac{150 \text{ dkg}}{5 \text{ dkg}} = 30$  db virsli tömegének felel meg, tehát ennyi virsli van a csomagban.

**E**

17. Egy tanuló a matematika dolgozatában az elérhető 80 pontból 16 pontot veszített. Hány százalékos a dolgozat eredménye?

- A) 85      B) 75      C) 20      D) 80      E) 72

A tanulónak  $80 - 16 = 64$  pontja lett, ami az elérhető pontszámnak  $\frac{64}{80} \cdot 100 = 80$  százaléka.

**D**

18. Öt alma és hat narancs 10 Ft-tal kerül többbe, mint hat alma és öt narancs. Hány forinttal kerül többbe egy narancs egy almánál?

- A) 10      B) 5      C) 25      D) 15      E) 20

Ha az alma  $a$  Ft-ba, a narancs pedig  $n$  Ft-ba kerül, akkor:

$$5a + 6n = 6a + 5n + 10$$

Ha az egyenlet két oldalából elveszünk  $5a$ -t és még  $5n$ -et, akkor:

$$n = a + 10$$

Azaz egy db narancs tíz forinttal drágább, mint egy db alma.

**A**

19. Egy osztálynak 50-nél kevesebb tanulója van. Ha testnevelésórán először hatosával, majd ötösével állnak sorba, akkor az utolsó sorban minden esetben 2 tanuló áll. Hány diák jár az osztályba?

- A) 30      B) 32      C) 33      D) 22      E) 31

Ha kettővel kevesebb tanuló lenne az osztályban, akkor a létszám hattal és öttel is osztható lenne, így osztható lenne ezek legkisebb közös többszörösével is, ami 30.

Tehát a megoldási lehetőségek közül azt keressük, amelyiknél 2-vel kisebb szám 30-cal osztható.

(A feltételeknek oszthatósági szempontból megfelel még a 2, azonban ez nem szerepel a lehetőségek között, és nem is lenne életszerű, hogy 2 tanulót ötösével és hatosával sorba állítsanak.)

**B**

20. Egy üzletbe 10 bőröndöt szállítottak és külön borítékban a hozzájuk tartozó 10 kulcsot. Minden kulccsal csak egy, a saját bőröndje nyitható. Legfeljebb hány próbálkozással, kulcsnak a zárba helyezésével nyitható ki biztosan mind a 10 bőrönd?

A) 10      B) 45      C) 55      D) 90      E) 100

Az első bőröndöt legfeljebb 10 próbálkozással lehet biztosan kinyitni, mert ennyi kulcs van (mindegyiket kipróbáljuk).

A második bőröndöt eggyel kevesebb, legfeljebb 9 próbálkozással lehet biztosan kinyitni, hiszen az elsőt már kinyitottuk.

Ez így folytatódik egészen az utolsó bőröndig, amit legfeljebb 1 (illetve pontosan 1) próbálkozással lehet kinyitni (egy bőröndhöz egy kulcs maradt), ez mindösszesen  $10 + 9 + \dots + 2 + 1 = (10 + 1) \cdot \frac{10}{2} = 55$  próbálkozás.

Felmerülhet az a gondolat, hogy pl. az első bőröndnél 9 próbálkozás is elég. Igen, a helyes kulcs kiválasztásához. De a 10. lépés is kell, mert a feladatban az szerepel, hogy ...zárba helyezéssel nyitható ki.

**C**

21. Az ötöslottó-sorsoláson az első 90 pozitív egész számból húznak ki öt számot egymás után, visszatevés nélkül. Ha az első négy kihúzott szám átlaga 40, és az öt kihúzott szám átlaga 49, akkor mennyi az utoljára kihúzott szám?

A) 77      B) 81      C) 84      D) 85      E) 89

Az első négy kihúzott szám átlaga 40, ami azt jelenti, hogy az összegük  $4 \cdot 40 = 160$ .

Az öt kihúzott szám átlaga 49, ami azt jelenti, hogy az összegük  $5 \cdot 49 = 245$ .

Ezekből adódik, hogy az ötödikként kihúzott szám a  $245 - 160 = 85$ .

**D**

22. Hány kifejezés osztható 3-mal az alábbiak közül?

$$x = 2^{2022} \quad y = 2 \cdot 10^{100} \quad z = 3^{50} \quad u = 10^{100} + 2 \quad v = 9^9$$

A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

Az  $x$  kifejezés egy prímtényezős felbontás is egyben, amiből látható, hogy nem osztható 3-mal.

Az  $y$  szám  $\underbrace{2\ 000 \dots 000}_{100 \text{ db } 0}$  alakú, benne a számjegyek összege 2, így nem osztható 3-mal.

A  $z$  egy 3-hatvány, ami osztható 3-mal ( $3 \cdot 3^{49}$ ).

Az  $u$  szám  $\underbrace{1\ 000 \dots 000}_2$  alakú, benne a számjegyek összege 3, így osztható 3-mal.

A  $v$  egy 9-hatvány, ami egyben 3-hatvány is, ami szintén osztható 3-mal ( $(3^2)^9 = 3^{18}$ ).

**D**

23. Egy üres táblára felírtunk három, egymást követő egész számot, majd az egyiket letöröltük. Ha a táblán maradt számok összege 2022, akkor melyik számot töröltük le?

- A) 1005    B) 1007    C) 1008    D) 1009    **E) 1011**

Vizsgáljuk meg három egymást követő egész számból vett két számnak az összegét:

- ha a legkisebb vagy a legnagyobb számot hagyjuk el, akkor két egymást követő szám marad, amelyek összege páratlan (az egyik tag páros, a másik páratlan);
- ha a középső számot hagyjuk el, akkor az összeg páros (két páratlan vagy két páros szám)

A táblán maradt két szám összege 2022, ezért tudjuk, hogy a középső számot töröltük le. Jelölje ezt  $n$ , így

$$(n - 1) + (n + 1) = 2n = 2022$$

Tehát a letörölt szám az  $n = \frac{2022}{2} = 1011$  volt.

Ellenőrzés:  $1010; \del{1011}; 1012 \Rightarrow 1010 + 1012 = 2022$

**E**

24. Hány  $m^2$  sátorlapot használtak fel annak a négyzet alapú szabályos gúla (piramis) alakú sátonak az elkészítéséhez, amelynek alapéle 2,4 m, az oldallapok magassága 2,2 m, ha a sátonak nincs alaplapja? A veszteségektől tekintsünk el!

- A) 10,56**    B) 12,4    C) 14,24    D) 16,56    E) 21,12

A gúla alaplapját a feladat szerint nem kell figyelembe venni, így elég csak az oldallapokkal (palást) foglalkozni.

Az oldallapok egyenlőszárú háromszögek, amelyek alapja 2,4 m és magassága 2,2 m, így a területük:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{2,4 \text{ m} \cdot 2,2 \text{ m}}{2} = 2,64 \text{ m}^2$$

A gúla négyzet alapú, tehát négy ilyen oldallapja van, azaz összesen  $4 \cdot 2,64 \text{ m}^2 = 10,56 \text{ m}^2$  sátorlapra van szükség.

**A**

25. Hány olyan  $n$  természetes szám van, amelyre a  $\frac{5}{n-3}$  kifejezés értéke szintén természetes szám?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

A nevező osztója 5-nek és nemnegatív (mivel a tört értéke nemnegatív), így a nevező értéke 1 vagy 5.

A keresett  $n$  szám ennél 3-mal több, azaz 4 vagy 8. Ezek megoldások is, vagyis két db, a feltételnek megfelelő természetes szám van.

Ellenőrzés:

$$\frac{5}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{5}{8-3} = \frac{5}{5} = 1$$

Mind a két esetben pozitív egészet kaptunk, tehát a nevező osztója a számlálónak.

**A**

A feladatsort és a megoldásokat összeállították, szerkesztették:

**Juhászné Kunstár Mária, Pálinkás István, Marczis György**