XXVIII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2024-2025

I. kategória megoldások

1. **Az alábbiak közül melyik szám a legnagyobb?**

A) $\frac{221}{222}$ **B)** $\frac{21}{22}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{12}{22}$ **E)** $-\frac{222}{221}$

A vonalas törtek tizedes törtbe való átírásakor hamar, már a második tizedes jegynél látszik, hogy a $\frac{221}{222}$ tört értéke a legnagyobb. A $-\frac{222}{221}$ törtet így nem kell vizsgálni, hiszen egyedül negatív szám, ami az összes közül a legkisebb.

Megjegyzés:

Könnyen belátható, hogy általánosan is igaz, hogy pozitív n esetén az $\frac{n}{n+1}$ alakú törtek közül az a nagyobb, amelyiknél az n nagyobb.

A

2. **Egy fedett kosárban 10 piros, 15 zöld és 20 fehér kocka van. Legalább hány kockát kell egyesével kivenni (látatlanban), hogy biztosan legyen közöttük piros vagy fehér?**

A) 15 B) 20 C) 25 D) 10 E) 16

A 45 kocka közül legfeljebb 15 db kockát (az összes zöldet) tudunk kivenni, hogy ne legyen köztük se piros, se fehér (ne teljesüljön a feltétel). Így a dobozban már csak piros, illetve fehér kockák maradnak. A következő (16.) kivételkor akármelyik kockát is vesszük ki, a feltétel teljesül.

Megjegyzés:

Természetesen, már az első kivételkor is húzhatunk pirosat vagy fehéret, de ez nem biztos.

Tehát 16 kockát kell kivenni legalább, hogy **biztosan** legyen közöttük piros vagy fehér.

E

3. **Gábor egy év alatt 9 cm-t nőtt, ami 6 %-os növekedésnek felelt meg. Hány cm magas lett Gábor a 6 %-os növekedés után?**

A) 150 B) 159 C) 125 D) 164 E) 180

Gábor eredeti magasságának (ez a100 %) a 6 %-a 9 cm.

Gábor eredeti magasságának az 1 %-a $9:6=1{,}5$ cm.

Gábor eredeti magassága (ez a100 %) $1{,}5\cdot 100=150$ cm.

Ehhez hozzáadva a 9 cm-es növekedést, kapjuk, hogy Gábor $150+9=159$ cm magas lett a 6 %-os növekedés után.

B

4. **Mennyi az x értéke, ha tudjuk, hogy $\frac{1}{x}-\frac{1}{18}=-\frac{1}{6}$?**

A) -9 B) -6 C) -3 D) 12 E) 24

Rendezzük az egyenletet:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{18}=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{18}-\frac{1}{6}$$

közös nevezőre hozás:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{18}-\frac{3}{18}$$

kivonás elvégzése:

$$\frac{1}{x}=-\frac{2}{18}$$

reciprok képzése:

$$x=-9$$

Tehát a feltételnek megfelelő x értéke (lényegében a törtes egyenlet megoldása): $x=-9$

Megjegyzés:

Természetesen a feladat megoldható úgy is, hogy a lehetséges x értékeket behelyettesítjük az egyenletbe, és amelyik esetén igaz állítást kapunk, az lesz a keresett x érték.

A

5. **Laura a megtakarított pénzét három nap alatt költötte el. Első nap elköltötte megtakarításának 50 %-át, a második nap a megmaradt pénzösszeg $\frac{1}{3}$ részét, az utolsó nap pedig az így megmaradt 10000 Ft-ot. A harmadik nap elköltött összeg a megtakarításának hányad része?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) más válasz

Az első napi 50 % elköltése után maradt még 50 %, ami a megtakarításának $\frac{1}{2}$ része

A második napon a megmaradt $\frac{1}{2}$ rész $\frac{1}{3}$ részét, vagyis $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ részt költött el.

Így a harmadik napra maradt $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ rész.

Megjegyzés: látható, hogy a megoldáshoz a megadott 10000 Ft-ra nem volt szükség. Ezzel viszont kiszámíthatjuk, hogy Laurának 30000 Ft megtakarítása volt. Első nap 15000 Ft-ot ($\frac{1}{2}$ rész), második nap 5000 Ft-ot ($\frac{1}{6}$ rész), harmadik nap pedig 10000 Ft-ot ($\frac{1}{3}$ rész) költött el.

B

6. **Hány 0-ra végződik az a szám, amelyet úgy kaptunk, hogy 1-től 31-ig összeszoroztuk a pozitív egész számokat?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Határozzuk meg a szorzat prímtényezős felbontásában a 2-nek és az 5-nek a kitevőjét. Azért ezeket, mert ezek a 10-nek a prímtényezői. A kitevők közül a kisebbik szám megadja, hogy 10-nek hányadik hatványával osztható a szorzat, azaz, hogy hány nullára végződik.

Az 5 kitevőjének a meghatározásához meg kell számolni, hogy az 5-ös szám hányszor fordul elő 1-től 31-ig a tényezők prímtényezős felbontásában:

- minden ötödik számban egyszer (5; 10; 15; 20; 25, azaz 6 db)
- minden 25. számban még egyszer (25, azaz 1 db)

Most számoljuk meg a 2 kitevőit:

- minden páros (második) számban egyszer (2; 4; … 28; 30, azaz 15 db)
- minden 4. számban még egyszer (4; 8; … 24; 28, azaz 7 db)

- minden 8. számban még egyszer (8; 16; 24, azaz 3 db)
- minden 16. számban még egyszer (16, azaz 1 db)

Tehát a szorzatban a 2 kitevője 26, az 5 kitevője pedig 7.

Ez azt jelenti, hogy a szorzatból ki lehet emelni $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$-t, tehát a szorzat 7 db 0 számjegyre végződik.

D

7. Hány db 3-mal osztható, 2025-nél kisebb, páratlan természetes szám van?

A) 673 B) 336 C) 338 D) 337 E) 674

A 3-mal osztható, 2025-nél kisebb természetes számok:

$$3;\ 6;\ 9;\ 12;\ \dots\ 2013;\ 2016;\ 2019;\ 2022$$

A 3-mal osztható, 2025-nél kisebb, páratlan természetes számok:

$$3;\ \cancel{6};\ 9;\ \cancel{12};\ \dots\ 2013;\ \cancel{2016};\ 2019;\ \cancel{2022}$$

vagyis:

$$3;\ 9;\ \dots\ 2013;\ 2019$$

Azt kell tehát megszámlálni, ezek a természetes számok hányan vannak, mennyi ezen számhalmaz elemeinek a száma.

Egy lehetséges összeszámlálási módszer a következő. A számegyenesen a 3-asról indulva 6-osával kell lépkedni, így minden keresett számot érintünk (az indulót, a legkisebbet is). A 336. lépésben érjük el a 2019-et, mert $3 + 336 \cdot 6 = 3 + 2016 = 2019$.

Így összesen 337 db számot érintünk.

Tehát 337 db 3-mal osztható, 2025-nél kisebb, páratlan természetes szám van.

Megjegyzés:

A keresett számhalmaz elemeinek számát megkaphatjuk a számtani sorozat elemeinek megszámlálásával is.

$$a_1 = 3;\ a_n = 2019; d = 6; n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$2019 = 3 + (n-1)6$$

$$n = 337$$

D

8. Az $f(x) = mx + 6$ alakú függvény zérushelye $1,5$ (a függvény grafikonja a $1,5$-nél metszi az x-tengelyt). Mekkora az $f(28)$ értéke?

A) -6 B) $-1,5$ C) 118 D) -106 E) más válasz

Mivel az $f(x) = mx + 6$ alakú függvény zérushelye $x = 1{,}5$, ezért $0 = m \cdot 1{,}5 + 6$, amiből $m = -4$ következik, így a függvényünk hozzárendelési szabálya $f(x) = -4x + 6$ alakú.

Tehát $f(28) = -4 \cdot 28 + 6 = -106$.

D

9. **Nyáron az egyik hétfőn a maximális hőmérséklet 37 °C volt, másnap pedig 35 °C. Hány °C volt a maximális hőmérséklet szerdán, ha a három napi maximumok átlaga 34 °C volt?**

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) más válasz

Legyen a szerdai napon a maximális hőmérséklet T.

Így a három nap maximális hőmérsékleteinek átlaga: $\frac{37°C+35°C+T}{3} = 34°C$

Ezt rendezve kapjuk: $T = 30\ °C$

D

10. **Egy háromszög két belső szöge 50°-os és 70°-os. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik belső szög csúcsából induló belső szögfelező és magasságvonal?**

A) 20° B) 30° C) 60° D) 45° E) 10°

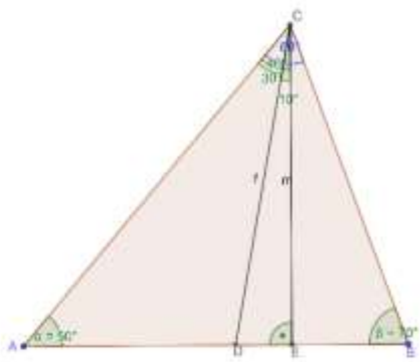
Az adatokból a háromszög harmadik belső szöge:
$$ACB\sphericalangle = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$$

Mivel f szögfelező: $ACD\sphericalangle = 30^\circ$

Mivel m magasságvonal, ezért: $ACE\sphericalangle = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$

A konstrukció miatt: $(f;m)\sphericalangle = DCE\sphericalangle = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$

Tehát a háromszögben a harmadik belső szög csúcsából induló belső szögfelező és magasságvonal 10°-os szöget zár be.



E

11. **Mennyi a $2024^{2025} + 2025^{2024}$ összeg 5-tel való osztási maradéka?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Az első tagnál vegyük észre, hogy a 4-re végződő számok páratlanadik hatványa 4-re, párosadik hatványa pedig 6-ra végződik! Így az első tag utolsó számjegye 4.

Könnyen észrevehető, hogy az összeg második tagja 5-re végződik, mivel egy 5-re végződő szám akárhányadik hatványának utolsó számjegye 5.

A két tag összegének utolsó számjegye pedig a tagok utolsó számjegyei összegének $(4 + 5)$ az utolsó számjegye, vagyis 9.

Egy 9-re végződő szám 5-tel való osztási maradéka 4.

Tehát a $2024^{2025} + 2025^{2024}$ összeg 5-tel való osztási maradéka 4.

E

12. **Berci madárfotózást végzett. A lefényképezett madarak pontosan $12,5$ %-a cinke, 50 %-a feketerigó, 25 %-a gólya, a többi fecske volt. Legkevesebb hány fényképet készített Berci?**

A) 10 B) 50 C) 24 D) 8 E) más válasz

Az adatokból következik, hogy a lefényképezett madarak $12,5\ \%$ –a fecske volt.

Mivel a fényképek száma pozitív egész kell, hogy legyen, ezért keressük azt a legkisebb számot, amelynek $12,5\ \%$ –a, másképpen $\frac{1}{8}$ része egész.

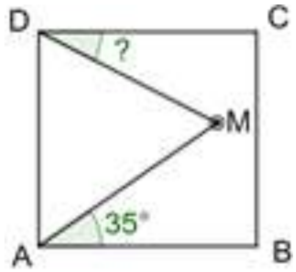
Ez pedig a 8, ami szerepel is a lehetőségek között. A 10-nek és az 50-nek az $\frac{1}{8}$ része nem egész, a 24-nek pedig 3. Ellenőrzésképpen meg kell nézni, hogy a többi % esetén is egész szám (feketerigó 4, gólya 2) jön ki.

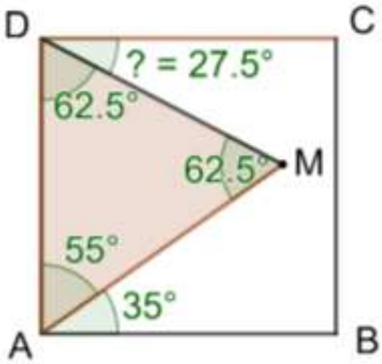
Tehát legkevesebb 8 fényképet készített Berci.

D

13. Az $ABCD$ négyzetnek az M egy olyan belső pontja, amelyre a $BAM\sphericalangle = 35^\circ$ és $AM = CD$. Ekkor a $CDM\sphericalangle =$

A) 28° B) $27,5^\circ$ C) 27° D) $26,5^\circ$ E) más válasz





A négyzet minden szöge derékszög, ezért $DAM\sphericalangle = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Mivel $AM = CD$, ezért és a négyzet egyenlő oldalai miatt $AD = CD$ is igaz, így $AD =$ AM.

Ebből következik, hogy az AMD háromszög egyenlő szárú, az alapon (DM) fekvő szögei egyenlőek.

A háromszög belső szögösszegére vonatkozó szabály szerint:

$$AMD\sphericalangle = ADM\sphericalangle = \frac{180^\circ - 55^{\circ\circ}}{2} = 62,5^\circ$$

A négyzet derékszögeiből pedig az következik, hogy: $CDM\sphericalangle = 90^\circ - 62,5^\circ = 27,5^\circ$

B

14. Egy medencébe két csapon keresztül folyhat a víz. Az üres medencét csak az első csap használatával 1 óra alatt, csak a második csap használatával 2 óra alatt lehet teljesen feltölteni. Hány perc alatt lesz tele az üres medence, ha egyszerre mindkét csapot kinyitjuk?

A) 20 B) 25 C) 35 D) 36 E) más válasz

Az együttes munkára vonatkozó ismereteinket foglaljuk táblázatba:

	Medence feltöltése	1 perc alatti feltöltés	Teljes medence
1. csap	1 óra = 60 perc	a medence $\frac{1}{60}$ része, $\frac{m}{60}$	
2. csap	2 óra = 120 perc	a medence $\frac{1}{120}$ része, $\frac{m}{120}$	
Együtt		$\frac{m}{60} + \frac{m}{120} = \frac{3m}{120} = \frac{m}{40}$	$\mathbf{40} \cdot \frac{m}{40} = m$

Tehát a két csap közösen 40 perc alatt tölteni fel a medencét.

Megjegyzés: a feladat megoldható formalizmus és kis fizikai ismeret segítségével is.

A táblázatunk második oszlopában lényegében a csapok teljesítményei szerepelnek.

Jelöljük a szükséges időt t-vel, az elvégzett munkát m-mel!

$$t \cdot \frac{m}{60} + t\frac{m}{120} = m$$

Az m-mel való egyszerűsítés, összevonás és az újabb egyszerűsítés után kapjuk:

$$\frac{t}{40} = 1$$

$$t = 40 \text{ perc}$$

Mivel ez a szám nem szerepel a lehetőségek között, így a más válasz a helyes.

E

15. Egy családban a két fiú- és egy lány gyermek közül véletlenszerűen kisorsolnak egyet-egyet, aki az ebéd, illetve a vacsora előtt megteríti az asztalt (ugyanaz a gyermek megterítheti az asztalt ebéd és vacsora előtt is). Mennyi annak az esélye (valószínűsége), hogy egy adott napon egy fiú és egy lány teríti meg az asztalt a két étkezésnél?

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{9}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{4}{6}$ **E) más válasz**

Először számítsuk ki, összesen hányféle lehetőség van a megterítő párosok kisorsolására!

Ebédre mind a 3 testvért választhatjuk, és vacsorához mindegyikhez 3 lehetőség párosul (ismétlés is lehet), így a szorzási szabály alapján az összes esetek száma $3 \cdot 3 = 9$

A kedvező esetek megszámlálásakor először azt nézzük, amikor ebédnél fiú terít, vacsoránál pedig lány! Ez $2 \cdot 1 = 2$ esetben lehetséges (f_1l; f_2l).

Ha azt számoljuk, hogy ebédnél lány, vacsorakor fiú terít, az $1 \cdot 2 = 2$ esetben lehetséges (lf_1, lf_2).

Így a kedvező esetek száma: $2 + 2 = 4$

A klasszikus valószínűségi mező szabálya szerint a kérdéses valószínűséget úgy kapjuk, hogy a kedvező esetek számát elosztjuk az összes esetek számával:

$$P = \frac{kedvező}{összes} = \frac{4}{9}$$

Tehát a kérdéses esély (valószínűség): $P = \frac{4}{9}$

Megjegyzés: a kis létszám miatt egyszerűen fel lehet sorolni a kedvező ás az összes esetet is.

C

16. Egy szám és a szám reciprokának összege 45. Mennyi lesz ugyanezen szám négyzetének és a szám négyzete reciprokának összege?

A) 2023 **B) 2024** **C) 2025** **D) 2027** **E) más válasz**

Jelöljük a keresett számot x-szel! Így a feltétel szerint tudjuk:

$$x + \frac{1}{x} = 45$$

Megtehetnénk, hogy megoldjuk ezt a törtes egyenletet, utána kiszámoljuk a kérdezett összeget. Ez bonyolult, az általános iskolai tananyagon túlmutató másodfokú egyenlethez vezetne, ami 10.-es követelmény.

Egyszerűbb út is van egy kis ötlettel.

Emeljük négyzetre az eredeti egyenlet mindkét (pozitív) oldalát, ami így ekvivalens átalakítás lesz!

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=45^2$$

Zárójel felbontva:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=2025$$

Szorzást elvégezve:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=2025$$

Kivonva minkét oldalból 2-t:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2023$$

Tehát a kérdéses összeg 2023.

A

17. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb minden éle 8 cm. Egy kocka élhosszainak összege megegyezik a hasáb élhosszainak összegével. Hány dm^3 a kocka térfogata?

A) $2,008$ B) $1,728$ C) $1,548$ D) $4,318$ E) 1728

Jelöljük a hasáb éleinek hosszát h-val! A 18 db egyenlő hosszúságú él össz hossza: $18h=18\cdot 8=144$ cm.

Jelöljük a kocka éleinek hosszát k-val! A 12 db egyenlő hosszúságú él össz hossza: $12k$

A feltétel szerint: $144=12k$, amiből $k=12$ cm $=1,2$ dm.

Az 1,2 dm élhosszúságú kocka térfogata: $1,2^3=1,728$ dm^3.

Tehát a keresett kocka térfogata 1,728 dm^3

B

18. Ha az ábrán látható táblázat üres mezőit úgy töltjük kivegy-egy számmal, hogy a sorokban, az oszlopokban és az átlókban is a számok összege ugyanannyi legyen, akkor mi kerül az y helyére?

		6
	6	9
		y

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) más válasz

A táblázat harmadik oszlopából tudjuk, hogy a sorokban, az oszlopokban és az átlókban a számok összege $S=6+9+y=15+y$.

Töltsük ki a táblázat lehetséges celláit, hogy az összegek kijöjjenek!

9	y	6
y	6	9
6	9	y

- a bal felső mezőbe 9-et kell írni a hozzá tartozó átló miatt
- a felső középső mezőbe y-t kell írni
- a bal középső mezőbe y-t kell írni

- a bal alsó mezőbe pedig 6-ot kell írni

Így a bal alsó mezőből a jobb felső mezőbe mutató átlóban 3 db 6-os lesz, melyek összege $18 = S$.

Mivel $S = 15 + y$, azért a $15 + y = 18$ egyenletből kiszámítható, hogy $y = 3$.

Tehát az y helyére 3 kerül, így minden sorban, minden oszlopban, minden átlóban a számok összege 18 lesz, amiről meggyőződhetünk a teljes táblázat kitöltésével.

9	**3**	6
3	6	9
6	**9**	**3**

B

19. Egy gyerekcsapat vásárolt a fagyizóban, ahol nyolcféle ízű fagylalt kapható. Mindenkinek sikerült a többiektől különböző kétgömbös fagyit kérni. Legfeljebb hány gyerek volt a csapatban, ha azt is tudjuk, hogy mindenki vegyes (kétféle ízű) fagyit kapott? (Két kétgömbös fagyit akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik gömbjükben különböznek, más ízűek!)

A) 20 B) 25 C) 28 D) 56 E) más válasz

Azt kell kiszámolni, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani 8 különböző elemből 2 különbözőt úgy, hogy a sorrend nem számít.

Első gömbnek 8 fajtát választhatunk, másodiknak már csak 7 fajtát, mert egy fagyiban nem lehet két azonos ízű gömb. Minden fajta első gömbhöz 7 fajta második gömböt választhatunk, így $8 \cdot 7 = 56$ lehetőség lesz (lenne).

De!

Ezzel a számlálási módszerrel minden kétgömbös, kétízű fagyit kétszer számoltunk (sorrend számított), mert megszámoltuk úgy, hogy pl. eper-citrom, és úgy is, hogy citrom-eper.

Emiatt az előbb kapott eredményt felezni kell: $\frac{56}{2} = 28$.

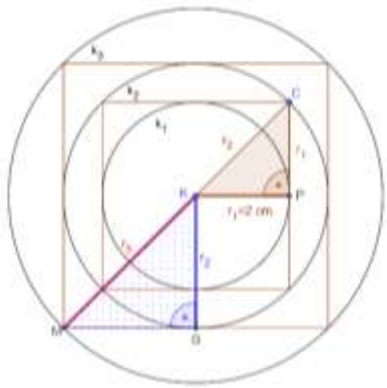
Így legfeljebb 28 főnek tudunk a feltételnek megfelelő kétgömbös, kétízű fagyit adni, vagyis legfeljebb 28 gyerek volt a csapatban.

Megjegyzés: természetesen 28-nál kevesebb gyerek esetén is kaphatnak különböző fagyit mindannyian, de 28-nál nagyobb létszámnál már biztosan lesz legalább két gyerek, akinek azonos, kétgömbös, kétízű fagyi fog jutni (skatulya-elv).

C

20. Adott egy 2 cm sugarú kör, mely köré érintőnégyzetet rajzolunk, majd a négyzet köré kört, mely átmegy a négyzet csúcsain. Ezt a két szerkesztést még egyszer végrehajtjuk. Hány centiméter lesz a legnagyobb kör sugara?

A) $3\sqrt{2}$ B) 5 C) 4 D) $2\sqrt{2}$ E) más válasz



Az ábra jelöléseit és a konstrukciót figyelembe véve k_1 kör sugara $r_1 = 2$ cm.

A k_1 kör köré rajzolt érintő négyzet oldala $2r_1 = 4$ cm.

A konstrukcióból adódóan KPC háromszög derékszögű, így $KPC\sphericalangle = 90^\circ$.

Pitagorasz tétel szerint: $r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

Az $r_2 = 2\sqrt{2}$ oldalú négyzet köré írt négyzet oldala $2r_2 = 4\sqrt{2}$.

A $4\sqrt{2}$ oldalú négyzet köré írt kör sugara legyen r_3.

A konstrukcióból adódóan KMG háromszög szintén derékszögű, így $KGM\sphericalangle = 90^\circ$

Pitagorasz tétel szerint: $r_3 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4.$

Tehát a legnagyobb kör sugara $r_3 = 4$ cm.

Megjegyzés: észrevehetjük, hogy a konstrukció valójában nem más, mint egy K középpontú $\lambda = \sqrt{2}$ hasonlósági arányú centrális hasonlóság kétszeres alkalmazása.

C

21. Hány olyan n egész szám van, amelyre a $\frac{3n+3}{n+5}$ tört helyettesítési értéke szintén egész szám lesz?

A) 12 **B) 10** **C) 9** **D) 8** **E) 6**

Az algebrai törtet át kell alakítani két, azonos nevezőjű algebrai tört összegére úgy, hogy az egyik algebrai tört egyszerűsítés után egész szám legyen. A teve-elv segítségével ki kell alakítani a számlálóban a nevező többszörösét. Természetesen a tört csak akkor értelmezett, ha $n \neq -5$.

$$\frac{3n+3}{n+5} = \frac{3n+3+12-12}{n+5} = \frac{3n+15-12}{n+5} = \frac{3(n+5)}{n+5} - \frac{12}{n+5} = 3 - \frac{12}{n+5}$$

A kéttagú összeg első tagja már egész, így az összeg akkor lesz egész, ha a második tag is egész lesz.

Mikor lesz egész a második tag? Akkor, ha az $n+5$ osztója a 12-nek.

A 12 osztói: $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \pm6;\ \pm12$ (megengedjük a negatív osztókat is)

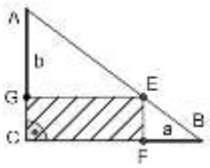
Ez 12 db osztót jelent, ami 12 db lehetséges n-et vonz maga után.

Ezek a következők: $-4;\ -6;\ -3;\ -7;\ -2;\ -8;\ -1;\ -9;\ 1;\ -11;\ 7;\ -17$

Tehát 12 olyan n egész szám van, amelyre a $\frac{3n+3}{n+5}$ tört helyettesítési értéke szintén egész szám lesz.

A

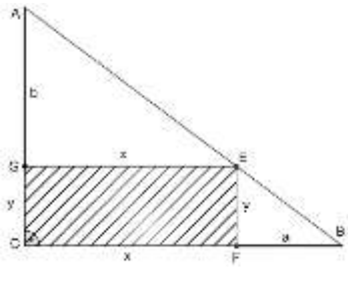
22. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszög egyes oldalain felvettük az E, F és G belső pontokat úgy, hogy az $EFCG$ (sávozott) négyszög téglalap lesz. Jelöljük az FB szakasz hosszát a-val, az AG szakasz hosszát b-vel! Az $EFCG$ téglalap területének mértéke ekkor:



A) $\frac{ab}{2}$ **B) ab** **C)** $2(a+b)$ **D)** $\frac{ab}{4}$ **E) más válasz**

Jelöljük az EFCG (sávozott) téglalap oldalait a következőképpen: $CF = EG = x$; $CG = EF = y$

Ezen jelölések alapján a sávozott téglalap területe: $T = xy$



A konstrukcióból és a feltételekből következik, hogy az AGE háromszög és az EFB háromszög hasonló, így a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{b}{x} = \frac{y}{a}$$

Ebből kapjuk: $ab = xy$. Ez pedig éppen a keresett (sávozott) téglalap területével egyezik meg.

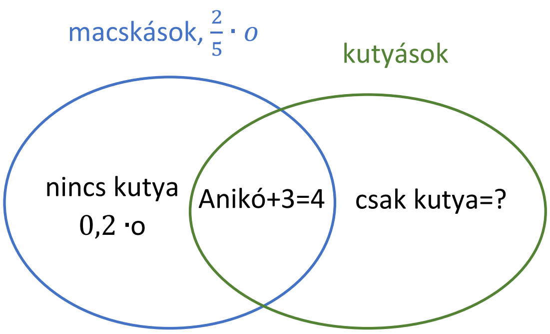
Tehát az $EFCG$ téglalap területének mértéke ab.

B

23. Anikó olyan osztályba jár, ahol mindenkinek van macskája vagy kutyája. Az osztály $\frac{2}{5}$ részének van macskája, és 20 % - ának pedig nincs kutyája. Anikón kívül még 3 diáknak van macskája és kutyája is. Hány tanulónak van csak kutyája?

A) 10 **B) 12** **C) 11** **D) 7** **E) más válasz**

Szemléltessük halmazábrán (Venn-diagramon) az osztály szerkezetét! Jelöljük az osztály létszámát



o −val!

A macskások száma: $\frac{2}{5} \cdot o$

Azok száma, akiknek nincs kutyája, az osztály 20 %-a: $0{,}2 \cdot o$

Azok száma, akiknek kutyája és macskája is van (metszet, közös rész) Anikóval együtt: $3 + 1 = 4$

A macskások halmaza két különálló részhalmazra bontható, akiknek nincs kutyájuk (csak macskájuk van) és akiknek van kutyájuk (macskájuk és kutyájuk is van).

A feltételek alapján:

$$0{,}2 \cdot o + 4 = \frac{2}{5} \cdot o$$

$$o = 20$$

Tehát az osztály létszáma 20 fő.

Felhasználva, hogy a halmazábrán szemléltetett részhalmazok különállók (nincs közös részük, diszjunktak), így azok elemszámának összege éppen az osztály létszámát adja. Itt kihasználtuk, hogy mindenkinek van legalább egy állata.

$$0{,}2 \cdot 20 + 4 + |\{csak\ kutyások\}| = 20$$

Ebből a műveletek és a rendezés után kapjuk, hogy:

$$|\{csak\ kutyások\}| = 12$$

Tehát az osztályban 12 tanulónak van csak kutyája.

B

24. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben bármely két számjegy összege prímszám?

A) 0 **B) 10** **C) 18** **D) 20** **E) 24**

Két számjegy összege maximum 18 lehet, így a lehetséges prímösszegek: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17

Végezzünk esetvizsgálatot a számjegyek paritása szerint!

a) két páros és egy páratlan számjegy:

A két páros összege páros, de ez az összeg csak a 2 lehet, így a két páros a 0 és a 2. Hozzájuk jönnek még a páratlan prímek közül.

Lehetőségek: $230;\ 203;\ 320;\ 302;\ 250;\ 205;\ 502;\ 520$ (a 7 nem lesz jó, mert $2+7=9$ nem prím)

b) két páratlan és egy páros:

A két páratlan összege páros, ezért ez csak a 2 lehet, ami csak $1+1$. Hozzájuk kell keresni párosakat.

Lehetőségek: $112;\ 121;\ 211;\ 114;\ 141;\ 411;\ 116;\ 161;\ 611$ (a 8-as nem lesz jó, mert $8+1=9$ nem prím)

c) mindhárom páratlan:

Ez csak a 111 lehet.

d) mindhárom páros:

A három között kell szerepelni a 0-nak és a 2-nek, de hozzájuk már nem találunk megfelelő páros harmadikat.

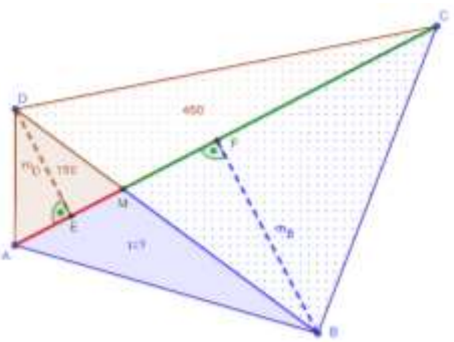
Így a feltételnek megfelelő számok száma: $8+9+1=18$

C

25. Egy konvex négyszög területe $2024\ \mathrm{cm}^2$. A négyszöget két átlójával négy háromszögre bontottuk. Két egymás melletti háromszög területe $150\ \mathrm{cm}^2$, illetve $450\ \mathrm{cm}^2$. A másik két háromszög területe közül hány cm^2 a kisebbik terület?

A) 356 **B) 150** **C) 418** **D) 481** **E) 506**

Készítsünk a feladat adatainak megfelelő vázlatot, hiszen egy jó vázlat sokat segít a megoldásban!



Legyen a $T_{AMD\Delta}=150\ \mathrm{cm}^2$, a $T_{MCD\Delta}=450\ \mathrm{cm}^2$!

A konstrukcióból következik, hogy ennek a két háromszögnek az AC átló egyenesére esik az AM és az MC oldala, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságuk $ED=m_D$ pedig közös.

Írjuk fel ezen háromszögek területeinek arányát!

$$\frac{T_{MCD\Delta}}{T_{AMD\Delta}}=\frac{450}{150}=3=\frac{\frac{MC\cdot m_D}{2}}{\frac{AM\cdot m_D}{2}}=\frac{MC}{AM}$$

Egyszerű összeadással adódik, hogy $T_{MCD\Delta} + T_{AMD\Delta} = 450 + 150 = 600$ cm^2.

Vizsgáljuk most az ABM és az MBC háromszögeket!

A konstrukcióból következik, hogy ennek a két háromszögnek is az AC átló egyenesére esik az AM és az MC oldala, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságuk $FB = m_B$ pedig szintén közös.

Írjuk fel ezen háromszögek területeinek arányát is!

$$\frac{T_{MBC\Delta}}{T_{ABM\Delta}} = \frac{\frac{MC \cdot m_B}{2}}{\frac{AM \cdot m_B}{2}} = \frac{MC}{AM} = 3$$

Ennek a két háromszögnek a területének összege: $2024 - 600 = 1424$ cm^2. Ezt a területösszeget kell felosztani $3:1$ arányban. Ez ugyanannyi, mint $1068:356$.

Az arányból következik, hogy a kisebbik területű háromszög az ABM háromszög.

Tehát a feladatban jelzett másik két háromszög közül a kisebbik terület: $T_{ABM\Delta} = 356$ cm^2.

A

A feladatsort és a megoldásokat összeállították, *szerkesztették* és lektorálták:

Hegyesi János, **Marczis György**, **dr. Molnár István**, **Molnár Judit, Pálinkás István, Papp Sándor, dr. Rókáné Rózsa Anikó, Szabó Zsófia, Tóth István**